Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

MAP2-v2 – 10 de Maio de 2024 – 18h
Duração: 45 minutos

Apresente e justifique todas as respostas

[6.0] 1. Determine e classifique os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \ln(1 + x^2) + (y^2 - 2y)z.$$

Resolução. Tendo em conta que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1 + x^2}, (2y - 2)z, y^2 - 2y\right),$$

os pontos críticos são $(0, 0, 0)$ e $(0, 2, 0)$. A hessiana de f é

$$Hf(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2z & 2y - 2 \\ 0 & 2y - 2 & 0 \end{bmatrix}$$

que, em qualquer um dos pontos críticos, tem dois valores próprios positivos e um negativo. Logo ambos os pontos críticos são pontos de sela.

2. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y) = (e^y - \cos(x), x - e^y).$$

[3.0] a) Mostre que g é invertível numa vizinhança de $(0, 0)$.

Resolução. g é uma função de classe C^1 com matriz jacobiana

$$Dg(x, y) = \begin{pmatrix} \sin(x) & e^y \\ 1 & -e^y \end{pmatrix};$$

assim

$$Dg(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

que é invertível, pelo que, em consequência do Teorema da Função Inversa, φ é invertível numa vizinhança desse ponto.

[2.0] b) Designando a inversa de g nessa vizinhança por h, calcule a matriz jacobiana $Dh(0, -1)$.

Resolução. Temos $g(0, 0) = (0, -1)$ e

$$Dh(0, -1) = (Dg(0, 0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Considere a região $\mathbb{E} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$ e a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x + y$.

[2.0] a) Justifique que a função f tem máximo e mínimo em $\mathbb{E}$.

Resolução. A região $\mathbb{E}$ é compacta (uma vez que é limitada – por exemplo, pela bola aberta de raio 2 centrada na origem – e fechada – porque contém a sua fronteira $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\}$) e a função f é contínua (por ser um polinómio), pelo que a existência de máximo e de mínimo segue do Teorema de Weierstraß.

[4.0] b) Calcule o máximo e o mínimo de f em $\mathbb{E}$.

Resolução. A função f não tem pontos críticos (uma vez que $\nabla f = (2,1)$), pelo que o máximo e o mínimo de f em $\mathbb{E}$ terão que ocorrer na fronteira de $\mathbb{E}$, que é a elipse dada pela equação $F(x,y) = 0$, onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a função $F(x,y) := 2x^2 + y^2 - 1$. Vamos calcular o máximo e o mínimo de f em $\mathbb{E}$ pelo método dos multiplicadores de Lagrange, resolvendo o sistema de equações $\nabla f = \lambda \nabla F$ e $F = 0$. Da primeira equação segue que $2 = 4\lambda x$ e $1 = 2\lambda y$, pelo que $\lambda \neq 0$ e $x = y$. Da segunda equação segue então que $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por conseguinte, o máximo é $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}$ e o mínimo é $f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\sqrt{3}$.

[3.0] 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e (a,b) um ponto tal que $f(a,b) = b$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 1$. Mostre que existe um intervalo $I =]a-\delta, a+\delta[$ e uma função $h : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfazendo

$$h(a) = b, \qquad f(x, h(x)) = h(x),$$

para todo o $x \in I$.

Resolução. Consideremos a função de classe C^1 $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = f(x,y) - y$. Temos $g(a,b) = 0$ e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - 1 \neq 0.$$

O Teorema da Função Implícita implica então que, numa vizinhança de (a,b), as soluções de $g(x,y) = 0$ são o gráfico de uma função $y = h(x)$, como indicado no enunciado.