Análise Matemática IV

2º semestre, 2004/2005

Exercício-teste 2

1. Considere os seguintes integrais *reais:*

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx, \tag{1}$$

onde $\int_0^{+\infty}$ deve ser interpretado como sendo igual ao $\lim_{r\to+\infty}\int_0^r$. Mostre que ambos os integrais são iguais a $\sqrt{2\pi}/4$.
[Sugestão: Aplique o Teorema de Cauchy à função inteira $f(z) = e^{-z^2}$ na fronteira do sector circular $S_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r \wedge arg(z) \in [0, \pi/4]\}$, faça $r \to +\infty$, e utilize o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$.]
[Observação: Os integrais em (1) designam-se por integrais de Fresnel e são úteis em Óptica (Teoria da Difração de Fresnel) e em diversas áreas de Engenharia (nomeadamente em Processamento de Sinais, mas também em outras áreas: para uma aplicação interessante ao projecto de linhas ferroviárias veja `http://www.du.edu/~jcalvert/railway/transpir.htm`*)]*

2. Seja $\xi \in \mathbb{R}$. Conclua que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi}dx = e^{-\pi\xi^2}. \tag{2}$$

[Sugestão: Aplique o Teorema de Cauchy-Goursat à função inteira $f(z) = e^{-\pi z^2}$ na fronteira do rectângulo $R_r = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in [-r, r] \wedge y \in [0, \xi]\}$, faça $r \to +\infty$, e utilize o resultado $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2}dx = 1$.]
[Observação: O integral que surge no membro esquerdo de (2) define a transformada de Fourier da função $e^{-\pi x^2}$. Esta função é particularmente importante em Processos Estocásticos, estando relacionada com a distribuição Normal, ou Gaussiana e intervindo em diversas aplicações fundamentais, tais como no estudo do movimento Browniano. A transformada de Fourier é um assunto de importância capital em Análise Matemática e nas suas aplicações à Física (Mecânica Quântica, Mecânica de Fluidos, Física Estatística) e às Engenharias (Propagação e Tratamento de Sinais). A igualdade (2) expressa o facto de $e^{-\pi(\cdot)^2}$ ser a sua própria transformada de Fourier.]