Sobre Desenvolvimentos em Séries de Potências, Séries de Taylor e Fórmula de Taylor

Pedro Lopes
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
1o. Semestre 2004/2005

Estas notas constituem um material de apoio ao curso de Análise Matemática II para as licenciaturas de Engenharia Geológica e Mineira, Engenharia de Materiais e Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico no 1o. semestre de 2004/2005 e não pretendem ser um substituto dos manuais escolares disponíveis.

1 Desenvolvimentos em Séries de Potências

Seja x um número real (não nulo) e considere-se a sucessão

$$u_n = x^n \qquad n \geq 0$$

Considere-se uma nova sucessão, obtida de u_n, que designamos por S_N, que para cada N é a soma dos $N+1$ primeiros termos de u_n, de $n=0$ até $n=N$, isto é,

$$S_N = \sum_{N=0}^{N} x^n$$

Embora seja fácil compreender o seu significado (soma dos $N+1$ primeiros termos da sucessão u_n), tal como a sucessão S_N está escrita, não nos revela muito sobre o seu comportamento (é limitada?, é convergente?). Tentemos então escrevê-la de outra forma.

$$\begin{aligned} S_{N+1} = \sum_{n=0}^{N+1} x^n &= x^0 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{N-1} + x^N + x^{N+1} = S_N + x^{N+1} \\ &= x^0 + x\Big(x^0 + x^1 + \cdots + x^{N-2} + x^{N-1} + x^N\Big) = 1 + xS_N \end{aligned}$$

donde

$$1 + xS_N = S_n + x^{N+1} \Leftrightarrow 1 - x^{N+1} = S_N - xS_N$$

e portanto,

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \qquad \text{para } x \neq 1$$

Consideremos desde já o caso $x = 1$:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 1^N = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{(N+1) \text{ parcelas}} = N + 1 \underset{N \mapsto \infty}{\longmapsto} \infty$$

Agora para $x \neq 1$:

$$S_N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x} \underset{N \mapsto \infty}{\longmapsto} \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{para } |x| < 1 \\ \text{diverge para } |x| \geq 1 \end{cases}$$

ou seja

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \overset{\text{def}}{=} \lim_{N \mapsto \infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N \mapsto \infty} S_N = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{para } |x| < 1 \\ \text{diverge para } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Acabámos então de ver que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{para } |x| < 1$$

isto é desenvolvemos $f(x) = \frac{1}{1-x}$ em série de potências de x em torno de 0, obtendo, para $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Deste desenvolvimento obtemos outros. Escrevamos então o mesmo desenvolvimento mas em ordem a uma nova variável y:

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{válido para } |y| < 1$$

Suponhamos agora que, dada uma constante a, $y = x - a$; então,

$$\frac{1}{1-(x-a)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n \qquad \text{naturalmente válido para } |x-a| < 1$$

E se $y = -x$?

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad \text{válido para } |-x| < 1 \ \big(\Leftrightarrow |x| < 1\big)$$

ou seja, o desenvolvimento em série de potências de x de $\frac{1}{1+x}$ é:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad \text{válido para } |x| < 1$$

E se $y = -x^2$?

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \text{válido para } |-x^2| < 1 \ \big(\Leftrightarrow |x| < 1\big)$$

ou seja obtivémos o desenvolvimento de

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad \text{válido para } |x| < 1$$

Recordamos aqui que, no interior do intervalo de convergência de uma série de potências de x, a derivada da série é igual à série das derivadas e que a primitiva da série é igual à série das primitivas. Isto vai-nos permitir obter desenvolvimentos em série de potências de x das funções $\log(1+x)$ e $\arctan(x)$. De facto,

$$\log(1+x) = P\frac{1}{1+x} \underset{|x|<1}{=} P\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + c$$

e notando que

$$0 = \log(1+0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n+1}0^{n+1} + c = 0 + c$$

vem $c = 0$, donde:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

Tambem porque $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ tem-se:

$$\arctan(x) = P\frac{1}{1+x^2} \underset{|x|<1}{=} P\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n P x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + c$$

e como

$$0 = \arctan(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}0^{2n+1} + c = 0 + c$$

vem

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad \text{para } |x| < 1$$

Exercício 1.1

Calcular desenvolvimentos em série de potências de x de

$$a) \quad \frac{1}{(1-x)^2} \qquad b) \quad \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Uma maneira de definir a função exponencial é:

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

que faz sentido para todo o x real, ou melhor, como a série em questão converge para todo o número real x então define um função de domínio $\mathbb{R}$. A essa função de x chamamos **exponencial de** x. Recordemos a propósito que, se existe o limite

$$\lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

(chamemos-lhe R) então a série de potências

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

converge absolutamente para todo o x em $\left]a-R, a+R\right[$ e diverge para todo o x em $\left]-\infty, a-R\right[\cup \left]a+R, \infty\right[$; a convergência em $x = \pm R$ tem que ser averiguada para cada caso específico de a_n.

Nesta abordagem informal, introduzamos ix na definição acima de exponencial (onde $i^2 = -1$):

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n$$

Notando que

$$\begin{aligned} &i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \\ &i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \\ &\ldots \end{aligned}$$

então para n par, isto é, para $n = 2k$, para algum k inteiro,

$$i^n = i^{2k} = (-1)^k$$

enquanto que para n ímpar, isto é, para $n = 2k+1$, para algum k inteiro,

$$i^n = i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i$$

Assim,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

e relembrando que

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

vem

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

e

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

2 Séries de Taylor

Dada uma função indefinidamente diferenciável num certo ponto a interior ao seu domínio (isto é, existe e é finita a derivada de qualquer ordem de f em $x = a$, $f^{(n)}(a)$) podemos sempre escrever a sua série de Taylor relativa a a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Qual a relação entre esta a série de Taylor e a função f que usámos para calcular os coeficientes da série? Na primeira secç ao procurou-se mostrar entre outras coisas que funcções transcendentes (no caso, exponencial, seno, coseno, logaritmo e arco de tangente) podem ser expressas como séries de potências (pelo menos nalgumas partes do seu domínio) e que as séries de potências são diferenciáveis e integráveis termo a termo evidenciando assim a importância de poder exprimir uma função à custa de uma série de potências. Retomando o assunto em discussão, seria desejável que a série de Taylor convergisse para a funcção que lhe deu origem, pelo menos nalguma vizinhança de a. Comecemos por definir

Definição 2.1

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se **analítica num ponto** a **de** D se é igual a uma série de potências de $x - a$ nalguma vizinhaçe a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \text{para } x \text{ "próximo" de } a$$

Assim, e sabendo que uma série de potências pode ser diferenciada termo a termo no interior do seu intervalo de convergeência, os c_n's são as n-ésimas derivadas de f em a multiplicadas por $n!$:

$$f'(a) = \left(c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n \right)' \Bigg|_{x=a} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Big((x-a)^n \Big)' \Big|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1} \Big|_{x=a} =$$
$$= c_1 \cdot 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n (a-a)^{n-1} = c_1 + 0 = c_1$$

Exercício 2.1

Calcule $f^{(2)}(a)$, $f^{(3)}(a)$, $f^{(4)}(a)$ e $f^{(n)}(a)$.

Portanto, funções analíticas num ponto a são indefinidamente diferenciáveis em a. A pergunta que fizémos acima pode agora reformular-se da seguinte maneira: Será que todas as funções indefinidamente diferenciáveis num ponto a são analíticas em a. A resposta é não, nem todas, como o seguinte exemplo ilustra,

Exemplo 2.1

Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Esta função é indefinidamente diferenciável em qualquer x, com todas as derivadas nulas em $x = 0$, isto é, $f^{(n)}(0) = 0$ qualquer que seja o n. A sua série de Taylor em torno de 0 (série de Mac-Laurin) será então a série idênticamente nula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$$

Por outro lado, $f(x)$ só é nula em $x = 0$, donde a série de Mac-Laurin de f não converge para a função em nenhuma vizinhança de 0.

Como reconhecer as funções indefinidamente diferenciáveis num ponto a que são analíticas nesse ponto a? O seguinte resultado dá-nos um critério para as distinguir:

Teorema 2.1 *Seja f indefinidamente diferenciável numa vizinhança de um ponto a. Se existirem um número real M e uma vizinhança $V_\epsilon(a)$ tais que, para cada $x \in V_\epsilon(a)$ e para cada inteiro positivo n se tenha*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

então f é igual à sua série de Taylor em torno de a para todo o $x \in V_\epsilon(a)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Dem. Omitida (ver livro do Prof. Campos Ferreira) ■

Mais prosaicamente, se uma função indefinidamente diferenciável tem todas as suas derivadas **globalmente** limitadas nalguma vizinhança de a, então, nessa vizinhança de a, a função é igual a sua série de Taylor.

Exemplo 2.2

As funções (indefinidamente diferenciáveis) $\sin(x)$ e $\cos(x)$ são tais que as suas derivadas são sempre um das seguintes funções: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $-\sin(x)$ ou $-\cos(x)$. Assim os módulos de tais funções, $|\sin(x)|$ e $|\cos(x)|$, são limitados por 1, qualquer que seja o x,

$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1 \qquad \text{qualquer que seja o } x \text{ em } \mathbb{R}$$

3 Fórmula de Taylor

...e se f não for indefinidamente diferenciável em a? Isto é, se f só admitir n derivadas no ponto a? Então vale a fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + r_n(x)$$

onde $r_n(x)$ é uma função de x tal que

$$\lim_{x\mapsto a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Observação 3.1

Se $a = 0$, a fórmula correspondente chama-se fórmula de Mac-Laurin.

Observação 3.2

As funções como o resto de ordem n, $r_n(x)$, que quando divididas por outra função e tomando o limite quando x tende para um certo a se obtem 0, têm uma designação especial:

$$f(x) = o\big(g(x)\big), \quad x \mapsto a \ \ \big(\text{leia-se "f(x) é ó pequeno de g(x) quando } x \text{ tende para } a\text{"}\big) \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\mapsto a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Assim, podemos escrever

$$r_n(x) = o\big((x-a)^n\big), \quad x \mapsto a$$

Se f for $n+1$ vezes diferenciável em a tem-se a seguinte fórmula para o resto (conhecida por fórmula do resto de Peano):

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\Big(f^{(n+1)}(a) + \alpha_n(x)\Big)$$

onde $\alpha_n(x)$ é uma função de x tal que:

$$\lim_{x\mapsto a} \alpha_n(x) = 0$$

3.1 Aplicação: Estudo de Extremos

Se f é uma função diferenciável, os pontos de estacionaridade, isto é, os pontos x aonde $f'(x) = 0$, são um ponto de partida para o estudo dos extremos de f

Suponhamos que f é duas vezes diferenciável em a e $f'(a) = 0$. Então a fórmula de Taylor aplicada a f no ponto a com resto de Peano é:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\Big(f''(a) + \alpha_1(x)\Big) = f(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\Big(f''(a) + \alpha_1(x)\Big)$$

já que $f'(a) = 0$ e portanto

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^2}{2}\Big(f''(a) + \alpha_1(x)\Big)$$

Se f tem um extremo local em a, então $f(x) - f(a)$ tem sinal constante nalguma vizinhança de a porque ou $f(x) \geq f(a)$ (mínimo local) ou $f(x) \leq f(a)$ (máximo local), nalguma vizinhança de a. Pretendemos, então, conhecer o sinal de $f(x) - f(a)$, numa vizinhança de a. Isso vai-nos ser facilitado pelo conhecimento do sinal de $f''(a)$, dada a igualdade acima. De facto, já que $(x-a)^2 \geq 0$ então o sinal de $f(x) - f(a)$ é dado por $f''(a) + \alpha_1(x)$. Suponhamos então que $f''(a) \neq 0$. Como $\lim_{x \mapsto a} \alpha_1(x) = 0$ então por definição de limite, para todo o $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, sempre que $x \in V_\delta(a)$ $|\alpha_1(x) - 0| < \epsilon$, ou seja $|\alpha_1(x)| < \epsilon$. Com $\epsilon = |f''(a)| (> 0)$, existirá então $\delta > 0$ tal que para todo o $x \in f''(a)_\delta(a)$, $|\alpha_1(x)| < |f''(a)|$ e portanto o sinal de $f''(a) + \alpha_1(x)$ é o sinal de $f''(a)$, nesa vizinhaną. Então se $f''(a) > 0$ o sinal de $f(x) - f(a)$ é positivo e portanto ocorre um mínimo em $x = a$; se $f''(a) < 0$ o sinal de $f(x) - f(a)$ é negativo e portanto ocorre um máximo em $x = a$.

Se $f''(a) = 0$ usamos a fórmula de Taylor de ordem dois:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\Big(f'''(a) + \alpha_2(x)\Big) = f(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\Big(f'''(a) + \alpha_2(x)\Big)$$

Mais uma vez, queremos saber o sinal de $f(x) - f(a)$ "junto" a a. Comecemos por supor que $f'''(a) \neq 0$. Tem-se:

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^3}{3!}\Big(f'''(a) + \alpha_2(x)\Big)$$

mas como $(x-a)^3$ muda de sinal quando x "passa" por a, então f não tem extremo em a. Se $f'''(a) = 0$, então utilizar-se-ia a fórmula de Taylor de ordem 3 e assim por diante. Enunciamos então o seguinte:

Teorema 3.1 *Seja f n vezes diferenciável em a (com $n \geq 2$) e tal que*

$$0 = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) \qquad e \qquad f^{(n)}(a) \neq 0$$

(i) Se n é par, $f(a)$ é máximo local se $f^{(n)}(a) < 0$ e é mínimo local se $f^{(n)}(a) > 0$
(ii) Se n é ímpar, f não tem extremo local em a

Dem. A fórmula de Taylor de ordem $n-1$ para f em a com resto de Peano é:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\Big(f^{(n)}(a) + \alpha_{n-1}(x)\Big)$$

Se n é par, então $(x-a)^n \geq 0$ e argumentando como acima concluímos que ocorre máximo em a se $f^{(n)}(a) < 0$ e mínimo se $f^{(n)}(a) > 0$. Analogamente para n ímpar. ■

Quanto à concavidade de uma função diferenciável num ponto a, a análise que se faz é analoga a que acabámos de fazer. Queremos agora é estudar o sinal da função $f(x) - g(x)$, onde $g(x) =)\big(f(a) + (x-a)f'(a)\big)$. O facto de o sinal da função $f(x) - g(x)$ ser negativo, pelo menos numa vizinhança de a, diz-nos que a função f está, nessa vizinhança, sempre abaixo da tangente no ponto a (concavidade voltada para baixo (côncava); ver exemplo na figura 1) e no caso de ser positivo, que a função está acima da tangente no ponto a (concavidade voltada para cima; convexa). Temos então:

Teorema 3.2 *Seja f n vezes diferenciável em a (com $n \geq 2$) e tal que*

$$0 = f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) \qquad e \qquad f^{(n)}(a) \neq 0$$

(i) Se n é par, f é côncava em a se $f^{(n)}(a) < 0$ e é convexa em a se $f^{(n)}(a) > 0$
(ii) Se n é ímpar, f tem ponto de inflexão em a

Dem. Omitida. ■

4 Outra maneira de definir derivada

Dada f diferenciável num ponto a, podemos escrever a sua fórmula de Taylor de ordem 1 relativamente a esse ponto a:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + r_1(x) \qquad \text{com } \lim_{x \mapsto a} \frac{r_1(x)}{x-a} = 0$$

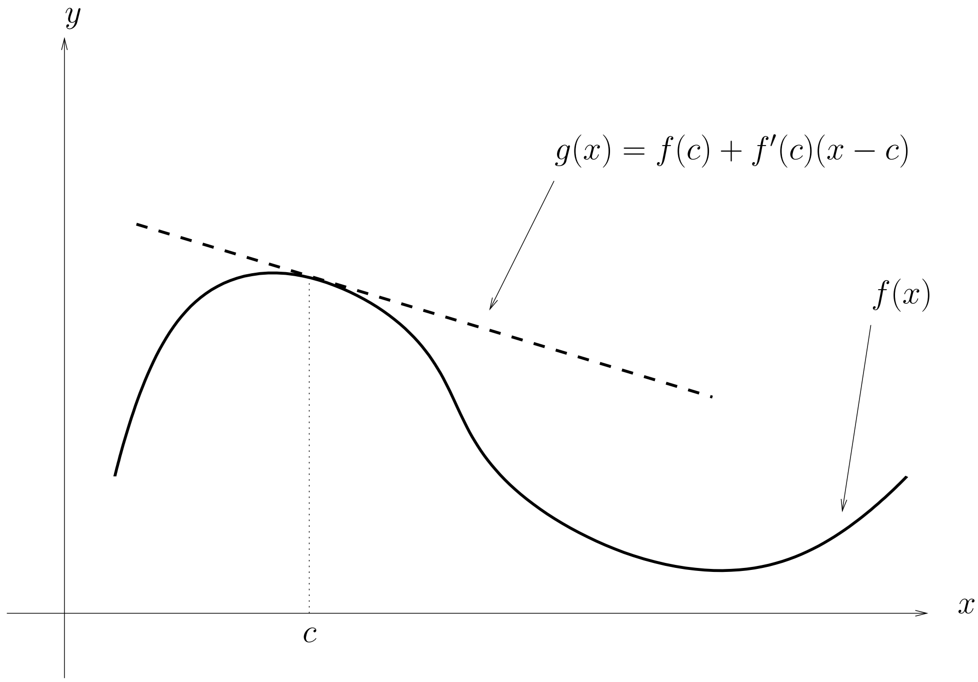

Figure 1: f diferenciável em c e a tangente ao gráfico de f em c.

Suponhamos agora que, dada uma função f definida numa vizinhança de a, existe um número real γ e uma função $r_1(x)$ tal que

$$f(x) = f(a) + \gamma \cdot (x - a) + r_1(x) \qquad \text{com } \lim_{x \mapsto a} \frac{r_1(x)}{x - a} = 0$$

Então

$$f(x) - f(a) = \gamma \cdot (x - a) + r_1(x) \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\gamma \cdot (x - a) + r_1(x)}{x - a} = \gamma + \frac{r_1(x)}{x - a}$$

e portanto

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \mapsto a} \left(\gamma + \frac{r_1(x)}{x - a} \right) = \gamma + \lim_{x \mapsto a} \frac{r_1(x)}{x - a} = \gamma + 0 = \gamma$$

ou seja f é diferenciável em a com $f'(a) = \gamma$.

Provámos então que f é diferenciável em a é equivalente a dizer que existe um número real, chamemos-lhe γ, e uma função $r_1(x)$, tal que

$$f(x) = f(a) + \gamma \cdot (x - a) + r_1(x) \qquad \text{com } \lim_{x \mapsto a} \frac{r_1(x)}{x - a} = 0$$

Reescrevendo esta expressão na forma

$$f(x) - f(a) = \gamma \cdot (x - a) + r_1(x) \qquad \text{com } \lim_{x \mapsto a} \frac{r_1(x)}{x - a} = 0$$

podemos dizer desta função que $f(x) - f(a)$ é aproximadamente linear em $x - a$:

$$f(x) - f(a) \approx \gamma \cdot (x - a)$$

e que essa aproximação é tanto melhor quanto mais próximo de a x estiver - já que $r_1(x)$ tende para zero mais rapidamente que $x - a$ quando x tende para a. Doutra forma ainda, a “distância” de $f(x)$ a $f(a)$ é, aproximadamente, uma função linear da “distância” de x a a.

Seguidamente, neste curso, estudaremos funções de várias variáveis, em particular funções reais de várias variáveis reais, por exemplo,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad \text{para todo o } x \text{ e } y \text{ reais}$$

O que significará "diferenciável num ponto (a, b)" para uma função deste tipo? Note-se que **NÃO** vai ser possível calcular

$$\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)}{(x,y)-(a,b)}$$

pois desde logo **NÃO** está definida um operação de divisão nestes conjuntos. Como vimos atrás, havia já em $\mathbb{R}$ uma outra maneira (equivalente) de definir derivada num ponto. Seria aqui dizer que a "distância" de $f(x, y)$ a $f(a, b)$ é, aproximadamente, uma função linear da "distância" de (x, y) a (a, b). É, de facto, esta a maneira que usaremos para definir derivada num ponto para estas novas funções, como veremos adiante.