

Justifique as suas respostas

1. Esboce o seguinte subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2 \}$$

2. Em  $\mathbb{R}^3$ , a recta  $L_1$  contem o ponto  $(4, 3, 2)$  e a sua direcção é dada pelo vector  $(3, 5, 1)$ ; a recta  $L_2$  contem o ponto  $(4, 3, 2)$  e a sua direcção é dada pelo vector  $(2, 3, 4)$ . Escreva uma expressão do plano que contem estas rectas.

3. Reescreva a equação  $z = x^2 - y^2$  usando coordenadas cilíndricas e usando coordenadas esféricas. Simplifique as expressões obtidas.

4. Caso exista, calcule o limite,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \sin(y^2)}{x^2 + y^2}$$

5. Seja  $f$  uma função de classe  $C^1$  e seja  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Mostre que:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \left( \frac{\partial g}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2$$

6. Classifique os pontos de estacionariedade de  $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$

7. Determine o máximo e o mínimo da função  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ , sobre o conjunto  $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1 \}$ .