

## MARYNA VIAZOVSKA, MEDALHA FIELDS EM $\mathbb{R}^8$

DIOGO OLIVEIRA E SILVA

O *hiperespaço* existe mesmo? Claro que sim – uma mensagem pode ser codificada por um vetor no espaço euclidiano  $d$ -dimensional. Se enviarmos uma mensagem  $m \in \mathbb{R}^d$  que é recebida como  $m^*$  no outro extremo do canal de comunicação, em geral  $m^*$  difere de  $m$  uma vez que qualquer canal tem sempre um certo *ruído* associado. Se o canal tiver um nível de ruído  $\varepsilon > 0$  e se  $m^*$  não distar de  $m$  mais do que  $\varepsilon$ , então faz sentido pensar na *esfera de erro* de raio  $\varepsilon$  centrada em cada mensagem  $m$  enviada. Para que a comunicação se faça sem erros, pode fixar-se à partida um dicionário finito  $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$  de mensagens permitidas. Se as mensagens  $m_j$  e  $m_k$  estiverem demasiado próximas para alguns  $j \neq k$ , então as mensagens recebidas poder-se-ão confundir. Isto evita-se garantindo que todas as mensagens distam umas das outras pelo menos  $2\varepsilon$ , por forma a que esferas de erro distintas não se intersectem. As esferas de erro formam assim um *empacotamento esférico* e, por uma questão de eficiência, queremos maximizar a densidade do empacotamento. Eis-nos chegados ao *problema do empacotamento esférico*, formulado em tempos imemoriais, mas cuja solução só era conhecida em dimensões  $d \in \{1, 2, 3\}$  até há sete anos atrás.

*Enters* Maryna Sergiivna Viazovska. Trata-se de uma matemática ucraniana nascida em Kiev a 2 de dezembro de 1984, formada na Ucrânia (Kiev) e na Alemanha (Kaiserslautern, Bona, Berlim) e que, depois de uma breve passagem pelos EUA (Princeton), ocupa atualmente a cátedra de Teoria dos Números na *École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, na Suíça. A 14 de março ( $\pi$ -day) de 2016, Viazovska divulgou no arXiv a solução do problema do empacotamento esférico em  $\mathbb{R}^8$  [9] que de um dia para o outro a tornou numa celebridade matemática mundial [12, 13]. Uma semana depois, Viazovska e quatro colaboradores (Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen Miller e Danylo Radchenko) anunciaram a solução do problema do empacotamento esférico em  $\mathbb{R}^{24}$  [3]. A história fascinante deste problema e algumas das ideias que possibilitaram a sua solução em dimensões 8 e 24, incluindo a caça épica à *função mágica*, são abordadas em [1, 2, 6, 7, 10], e também no artigo [8] que apareceu na última edição do Ponto Fixo.

Ao êxito retumbante de Viazovska seguiu-se uma lista de cardinalidade considerável de prémios e distinções ao mais alto nível: Salem Prize (2016), Clay Research Award (2017), SASTRA Ramanujan Prize (2017), New Horizons Prize in Mathematics (2018), ICM Invited Speaker (2018), Ruth Lyttle Satter Prize in Mathematics (2019), Fermat Prize (2019), EMS Prize (2020), National Latsis Prize (2020), Academia Europaea (2021), Senior Scholar at the Clay Mathematics Institute (2022), BBC 100 Women (2022). A cereja no topo do bolo chegou sob a forma da medalha Fields, que já se adivinhava desde 2018 e que foi atribuída a Viazovska no *International Congress of Mathematics* (ICM) de 2022, em Helsínquia [11, 15]. A *laudatio* por Henry Cohn [2] começa do seguinte modo:

“On July 5th, 2022, MARYNA VIAZOVSKA was awarded a Fields Medal for her solution of the sphere packing problem in eight dimensions, as well as further contributions to related extremal problems and interpolation problems in Fourier analysis.”

Viazovska tornou-se assim na segunda mulher a receber a mais alta distinção matemática desde que foi instituída em 1936 (a primeira tinha sido a matemática iraniana Maryam Mirzakhani em 2014). No ICM, Viazovska proferiu a palestra “Magic functions illuminate the mysteries of extremal geometry” que está disponível no YouTube [16] a partir de 6:46:15.

Nas palavras de Tom Hales<sup>1</sup> [14], “the fireworks have not stopped”. A equipa Cohn–Kumar–Miller–Radchenko–Viazovska (CKMRV) saiu dos projetos [3, 9] com uma visão, segundo a qual os métodos utilizados na solução do problema do empacotamento esférico em 8 e 24 dimensões deveriam funcionar em contextos mais gerais. E, de facto, em 2019 anunciaram uma prova [4] de que o reticulado  $E_8$  e o reticulado de Leech são “universalmente ótimos” em  $\mathbb{R}^8$  e  $\mathbb{R}^{24}$ . Quer isto dizer que são soluções de uma classe de problemas que inclui o empacotamento esférico como caso (muito) particular, resolvendo também outras questões prementes da física matemática formuladas em termos de forças de repulsão completamente monótonas, como as interações de Coulomb ou de Gauß. Pelo caminho, a equipa CKMRV descobriu um número infinito de funções mágicas, em bijeção com o conjunto de potenciais admissíveis, o que ao mesmo tempo demonstra a delicadeza da construção e revela uma razão mais conceptual para a existência e o poder da função mágica original de Viazovska. Que outras surpresas virão das dimensões 8 e 24?

## BIBLIOGRAFIA

- [1] H. COHN, *A conceptual breakthrough in sphere packing*. Notices Amer. Math. Soc. **64** (2017), no. 2, 102–115.
- [2] H. COHN, *The work of Maryna Viazovska*. arXiv:2207.06913. Proc. ICM, to appear.
- [3] H. COHN, A. KUMAR, S. MILLER, D. RADCHENKO, M. VIAZOVSKA, *The sphere packing problem in dimension 24*. Ann. of Math. (2) **185** (2017), no. 3, 1017–1033.
- [4] H. COHN, A. KUMAR, S. MILLER, D. RADCHENKO, M. VIAZOVSKA, *Universal optimality of the  $E_8$  and Leech lattices and interpolation formulas*. Ann. of Math. (2) **196** (2022), no. 3, 983–1082.
- [5] T. C. HALES, *A proof of the Kepler conjecture*. Ann. of Math. (2) **162** (2005), no. 3, 1065–1185.
- [6] J. OESTERLÉ, *Densité maximale des empilements de sphères en dimensions 8 et 24*. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135. Astérisque 2019, no. 407, Exp. No. 1133, 455–478.
- [7] A. OKOUNKOV, *The magic of 8 and 24*. arXiv:2207.03871. Proc. ICM, to appear.
- [8] D. OLIVEIRA E SILVA, *Empacotamentos esféricos e o princípio da incerteza do sinal*. Ponto Fixo, #4.edição, IST Press, 2022, 41–43.
- [9] M. VIAZOVSKA, *The sphere packing problem in dimension 8*. Ann. of Math. (2) **185** (2017), no. 3, 991–1015.
- [10] M. VIAZOVSKA, *Almost impossible  $E_8$  and Leech lattices*. Eur. Math. Soc. Mag. No. 121 (2021), 4–8.
- [11] <https://www.nytimes.com/2022/07/05/science/maryna-viazovska-math.html>
- [12] <https://www.newscientist.com/article/2082328-new-maths-proof-shows-how-to-stack-oranges-in-24-dimensions/>
- [13] <https://www.quantamagazine.org/sphere-packing-solved-in-higher-dimensions-20160330/>
- [14] <https://www.quantamagazine.org/universal-math-solutions-in-dimensions-8-and-24-20190513/>
- [15] <https://www.quantamagazine.org/ukrainian-mathematician-maryna-viazovska-wins-fields-medal-20220705/>
- [16] <https://www.youtube.com/watch?v=Uh2gqiEC6eM>

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, AV. ROVISCO PAIS, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL

*Email address:* diogo.oliveira.e.silva@tecnico.ulisboa.pt

---

<sup>1</sup>Que em 1998 tinha resolvido o problema do empacotamento esférico em  $\mathbb{R}^3$  [5].