Analysis II, Übungsblatt Nr. 10

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Sommersemester 2015

Abgabe in der Vorlesung am 06.07.2015.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Zusammenhang)
Wir betrachten den metrischen Raum (M, d), wobei die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ durch

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \sin(1/x) \end{pmatrix} : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} : |t| \leq 1 \right\}$$

definiert ist und d die induzierte euklidische Metrik ist.
Zeigen Sie:

(a) M ist zusammenhängend.

(b) M ist nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe 2 (Astroide)
Sei die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

(a) Ist die Kurve γ geschlossen? Von der Klasse C^1? Regulär?[1]

(b) Skizzieren Sie die Spur von γ und diskutieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit Aufgabenteil (a).

(c) Geben Sie eine Funktion F an, so dass die Spur von γ gerade die Lösungsmenge der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist.

(d) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma x \, dx + y \, dy.$$

Aufgabe 3 (Zylinder)
Sei $r > 0$. Berechnen Sie das Volumen des Durchschnitts der zwei Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

---

[1] Eine C^1-Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, wenn $\frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Aufgabe 4 (Windungszahl)

Unter der *Windungszahl* einer regulären geschlossenen C^1-Kurve γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bezüglich des Punktes $p = (0,0)$ versteht man den Wert

$$w_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

Beweisen Sie:

(a) Zwei beliebige, homotope,[2] geschlossene Kurven γ und $\widetilde{\gamma}$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ haben die gleiche Windungszahl bezüglich p.

(b) Es existieren Funktionen $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ so dass

$$\nabla f_i(x,y) = \Big(- \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \Big), \quad \forall (x,y) \in U_i,$$

wobei $U_1 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\}$ und $U_2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \geq 0\}$. Konstruieren Sie solche Funktionen und beschreiben Sie $f_1 - f_2$ auf $U_1 \cap U_2$.

(c) Zeigen Sie: Die Windungszahl $w_p(\gamma)$ ist eine ganze Zahl. Betrachten Sie dazu die Menge aller t für die mindestens eine der Differenzen $f_1(\gamma(t)) - f(t), f_2(\gamma(t)) - f(t)$ definiert und in $\mathbb{Z}$ ist für geeignete f_1, f_2 wie in (b), wobei

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_a^t \frac{\gamma_1(s)}{\gamma_1(s)^2 + \gamma_2(s)^2} {\gamma_2}'(s) - \frac{\gamma_2(s)}{\gamma_1(s)^2+\gamma_2(s)^2} {\gamma_1}'(s)\, ds.$$

[2]Dies bedeutet hier: Es gibt eine C^1-Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $H(\cdot,0) = \gamma$, $H(\cdot,1) = \widetilde{\gamma}$ und $H(a,\cdot) = H(b,\cdot) =$ konstant.