Analysis 1, Übungsblatt Nr. 9

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

universitätbonn

Abgabe in der Vorlesung am 11.12.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Stetigkeit)
Man definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } 0 < x < \frac{1}{\pi}, \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \text{ oder } x \ge \frac{1}{\pi}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist stetig.

(b) f ist nicht von beschränkter Variation.

Aufgabe 2 (Konvexität und Hölder)

(a) Seien $x_1, \ldots, x_n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positive reelle Zahlen. Weiter sei $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \le \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

(b) Seien $a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots, a_n, b_n$ positive reelle Zahlen, und seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\Big)^{1/q}.$$

Aufgabe 3 (Riemannsche Summen)
Sei $k_0, k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_0$, und seien $a, b \in \mathbb{Y}_{k_0}$ mit $a < b < \infty$.
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktionen

$$f(x) = x \text{ und } g(x) = x^2.$$

Berechnen Sie:

(a) $L_k(f, a, b)$ und $L_k(g, a, b)$.

(b) $U_k(f, a, b)$ und $U_k(g, a, b)$.

(c) $\int_a^b x dx$ und $\int_a^b x^2 dx$, indem Sie die Integrale explizit als Grenzwerte geeigneter Riemannscher Summen berechnen.

Aufgabe 4 (Eine geometrische Ungleichung)

Sei Δ ein Dreieck in der Ebene mit Flächeninhalt $A > 0$.

Zeigen Sie, dass Δ zwei Seiten mit Längen ℓ_1 und ℓ_2 enthält, so dass

$$\ell_1 \cdot \ell_2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} A.$$