Analysis 1, Übungsblatt Nr. 7

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christoph Thiele
Dr. Diogo Oliveira e Silva
Wintersemester 2014/15

Abgabe in der Vorlesung am 27.11.2014.
Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (Folgen: $\sup, \inf, \limsup, \liminf$**)**

Bestimmen Sie mit Begründung $\sup\{x_n : n \geq 1\}$, $\inf\{x_n : n \geq 1\}$, $\limsup_{n\to\infty}\{x_n : n \geq 1\}$, sowie $\liminf_{n\to\infty}\{x_n : n \geq 1\}$ für die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, wenn

(a) $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$,

(b) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

(c) $x_n = n^{(-1)^n}$.

Aufgabe 2 (Reihen)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!},$$

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Aufgabe 3 (Fubini ohne Tonelli)

Nennen Sie ein Beispiel f von einer Folge von Folgen

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

so dass

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(m) < \infty \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_n(m) < \infty,$$

aber

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(m) \neq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_n(m).$$

Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

Aufgabe 4 (Konvergente Reihe)

Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{falls die Dezimaldarstellung von } n \text{ keine Ziffer 9 enthält,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$$

konvergiert.