TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1^{o} Semestre 2019/2020, 15/01/2020

Testes de Recuperação / Exame — versão B

LEIC-T, LEGI, LEE, LETI

1^{o} Teste / Exame (1^{a} parte)

[3,0 val.] 1. Considere a função $u(x,y) = x^3 + \beta\, y^3 + 3x^2 y - 3xy^2$, onde $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Determine todos os valores de β para os quais u é harmónica em $\mathbb{R}^2$;

(b) Considerando $\beta = -1$, determine a função inteira f tal que $\operatorname{Re}(f) = u$ e $f(0) = -i$;

(c) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_\gamma \frac{f(z) - f'(z)}{z+i}\, dz,$$

onde o caminho γ é parametrizado por $\gamma(t) = -i + 2e^{-i\pi t}$, com $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

[3,0 val.] 2. Considere a função de variável complexa f definida por

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z(z+2i)} - \cos\left(\frac{1}{z-i}\right) + \frac{3z}{(z+4i)^5}.$$

(a) Determine e classifique todas as singularidades de f;

(b) Calcule, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z-i|=\pi} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso.

[2,0 val.] 3. Usando o teorema dos resíduos, calcule o integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(9+x^2)(1+x^2)}\, dx$$

[1,0 val.] 4. Considere a função definida por

$$f(z) = \frac{i}{z(4+iz)} + \log(1+z^2)$$

onde $\log$ é a função logaritmo correspondente à escolha do argumento principal. Determine o desenvolvimento de f em série de Laurent, em torno de $z=0$, indicando o seu domínio de validade.

[1,0 val.] 5. Considere a função g definida no seu domínio por

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(2i)^n}\, z^n.$$

Justifique que g é holomorfa num aberto que contém $\{z : |z| \leqslant 1\}$ e calcule

$$\oint_{|z|=1} \overline{g(z)}\, dz.$$

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte) — versão B

6. Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$-3t^2 + \left(\frac{t^3}{y} + y\right)\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(0) = 2\,.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ para a equação diferencial.

[2,0 val.] (b) Determine explicitamente a solução $y = y(t)$ do PVI e indique o intervalo máximo de existência e unicidade.

Sugestão: *Caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(y) = y^{-1}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).*

[1,5 val.] 7. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y + 1 \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y + 2 \end{cases}$$

com $x(0) = y(0) = 1$.

[2,5 val.] 8. (a) Determine a solução do problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}, \qquad y(0) = 1 - y'(0) = 0;$$

(b) Determine uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que todas as soluções de

$$y'' + 16y = f(t)$$

estejam definidas e sejam ilimitadas nos intervalos $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$.

[2,0 val.] 9. Determine uma solução do problema de valor na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4u = 0 & \text{para} \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 & \text{para} \quad t \geqslant 0, \\ u(0,x) = 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 10 - \cos(2\pi x) & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

[1.0 val.] 10. Seja $L > 0$ e uma função f, seccionalmente C^1 em $[-L, L]$, par e que verifica

$$f(L - x) = -f(x), \qquad x \in [0, L].$$

Mostre que no desenvolvimento em série de Fourier de f no intervalo $[-L, L]$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

se tem $b_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$ e $a_{2n} = 0,\ n \in \mathbb{N}_0$. Justifique ainda que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[(2n+1)x], \qquad \text{para} \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$