DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEBiom, LEBiol, LEMat, LEQ

Teste 1 (Versão A)

17 de Outubro de 2024, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2 e^{2-y} \quad , \quad y(0) = 2$$

   (a) (4 val.) Determine explicitamente a solução do PVI.

   Resolução:

A equação é equivalente a

$$e^{y-2}\frac{dy}{dx} = 3x^2,$$

que é uma equação separável. Assim sendo, a sua solução geral (na forma implícita) é dada por

$$\int e^{y-2} dy = \int 3x^2 dx + c, \qquad \text{com } c \in \mathbb{R},$$

ou seja:

$$e^{y-2} = x^3 + c.$$

Calculando c de forma a que $y(0) = 2$, obtém-se $c = 1$ e como tal

$$y(x) = 2 + \log(1 + x^3).$$

   (b) (1 val.) Indique o intervalo máximo de existência da solução do PVI.

   Resolução:

Basta notar que a função obtida em (a) está definida e é de classe C^1 no conjunto dos $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$1 + x^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1.$$

Desta forma, $I_{\max} =]-1, +\infty[$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$t^2 y' - ty + g(t) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

em que $g(t)$ é uma função real de variável real.

(a) (4 val.) Determine a solução do PVI no caso em que $g(t) = 2$, indicando o intervalo máximo de solução.

Resolução:

Para $t \neq 0$, a equação é equivalente a:

$$y' - \frac{1}{t} y \; = \; -\frac{2}{t^2}.$$

Trata-se de uma equação linear, cujo factor integrante pode ser:

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = e^{-\log t} = \frac{1}{t}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(t)$, obtém-se

$$\frac{1}{t} y' - \frac{1}{t^2} y = -\frac{2}{t^3},$$

ou seja

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t} y\right) = -\frac{2}{t^3}.$$

Calculando as primitivas obtém-se (para $t \neq 0$):

$$\frac{y(t)}{t} = \frac{1}{t^2} + c \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{t} + ct \qquad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

Tendo em conta que $0 = y(1) = 1 + c$, temos que $c = -1$, pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{t} + t, \qquad \text{definida em } I_{\max} = \mathbb{R}^+.$$

(b) (1 val.) Sem tentar resolver a equação, determine o intervalo máximo de existência da solução do PVI no caso em que $g(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$.

Resolução:

A equação dada é equivalente a $y' + a(t)y = b(t)$, com $a(t) = -\frac{1}{t}$ e $b(t) = -\frac{1}{t^2 \operatorname{sen} t}$. (Note que não é necessário exigir $t \neq 0$, pois $g(t)$ já não está definida nesse ponto). Tratando-se de uma equação linear, o intervalo máximo de solução será o maior intervalo contendo $t_0 = 1$ e tal que $a(t)$ e $b(t)$ estão bem definidas e são ambas contínuas. Para tal, é necessário excluir

$$t = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} t = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; t = k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

Concluimos que $I_{\max} =]0, \pi[$.

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) (4 val.) Determine e^{At}

Vamos começar por determinar uma matriz solução fundamental de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, resolvendo o sistema equivalente. Assim, sendo $\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{Y} = (x, y, z)$ temos que

$$\begin{cases} x' = 2x + z \\ y' = 2y \\ z' = 2z \end{cases}$$

Resolvendo a segunda e a terceira equações, obtém-se:

$$y(t) = be^{2t} \qquad \text{e} \qquad z(t) = ce^{2t} \qquad \text{com } b, c \in \mathbb{R}.$$

Substituindo z na primeira equação, resulta a equação linear de 1ª ordem

$$x' - 2x = ce^{2t},$$

que tem o factor integrante $\mu(t) = e^{\int -2dt} = e^{-2t}$. Assim sendo

$$e^{-2t}x' - 2e^{-2t}x = c \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{-2t}x\right) = c \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-2t}x = a + ct,$$

ou seja

$$x(t) = ae^{2t} + cte^{2t}, \qquad \text{com } a \in \mathbb{R}.$$

A solução geral de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ é

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae^{2t} + cte^{2t} \\ be^{2t} \\ ce^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Desta forma, uma matrix solução fundamental associada à equação é

$$S(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tendo em conta que $S(0) = I$, então $e^{At} = S(t)S^{-1}(0) = S(t)$.

(b) (1 val.) Calcule a solução de $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}(0) = (0, 0, \alpha)$, onde α é um número real. Para que valores de α a solução é limitada?

Pela fórmula da variação das constantes:

$$\mathbf{Y}(t) \;=\; e^{At}\,\mathbf{Y}(0) \;=\; e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \;=\; e^{2t} \begin{bmatrix} \alpha t \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \;=\; \alpha e^{2t} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado que a função e^{2t} não é limitada em $\mathbb{R}$, a solução do problema de valor inicial é limitada se e só se $\alpha = 0$.

4. Considere a equação diferencial

$$y'' + 4y = f(t)$$

em que $f(t)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

(a) (1 val.) Determine a solução geral da equação homogénea associada.

Usando a notação $y' = Dy$, obtém-se

$$y'' + 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 4)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D - 2i)(D + 2i)y = 0$$

pelo que a solução geral da equação homogénea é

$$y_G(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t$$

(b) (2 val.) Sendo $f(t) = 4t$ calcule a solução da equação que satisfaz $y(0) = y'(0) = 1$.

O polinómio aniquilador da função $f(t) = 4t$ é $P_A(D) = D^2$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação diferencial $(D - 2i)(D + 2i)y = 4t$, obtém-se:

$$D^2(D - 2i)(D + 2i)y = D^2(4t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$y(t) = \underbrace{c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t}_{y_G(t)} + c_3 + c_4 t.$$

Então $y_P(t) = c_3 + c_4 t$ é o candidato a solução particular. Substituindo na equação $y'' + 4y = 4t$, obtém-se (para qualquer $t \in \mathbb{R}$):

$$4c_3 + 4c_4 t = 4t \qquad \Rightarrow \qquad c_3 = 0 \ \wedge \ c_4 = 1.$$

A solução geral da equação homogénea é

$$y(t) = y_G(t) + y_P(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + t, \qquad \text{onde} \ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sendo que $y'(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + 1$, então pelas condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ 2c_2 + 1 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Assim sendo, a solução do problema de valor inicial é:

$$y(t) = \cos 2t + t.$$

(c) (2 val.) Determine uma solução particular da equação no caso em que $f(t) = \frac{4}{\cos(2t)}$ válida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

Uma matriz wronskiana associada à equação $(D - 2i)(D + 2i)y = f(t)$ é

$$W(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & \operatorname{sen} 2t \\ -2 \operatorname{sen} 2t & 2 \cos 2t \end{bmatrix}.$$

A sua inversa é

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{2\cos^2 2t + 2\,\mathrm{sen}^2\, 2t}\begin{bmatrix} 2\cos 2t & -\,\mathrm{sen}\, 2t \\ 2\,\mathrm{sen}\, 2t & \cos 2t \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos 2t & -\,\mathrm{sen}\, 2t \\ 2\,\mathrm{sen}\, 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula da variação das constantes:

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= \begin{bmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \end{bmatrix} + \int \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos 2t & -\,\mathrm{sen}\, 2t \\ 2\,\mathrm{sen}\, 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{\cos(2t)} \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{-2\,\mathrm{sen}\, 2t}{\cos 2t} \\ 2 \end{bmatrix} dt \\
&= \begin{bmatrix} \cos 2t & \mathrm{sen}\, 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log|\cos 2t| \\ 2t \end{bmatrix} \\
&= \cos 2t\ \log(\cos 2t) + 2t\,\mathrm{sen}\, 2t.
\end{aligned}$$

Note que para $t \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, $\cos 2t\ 0$, pelo que $\log|\cos 2t| = \log(\cos 2t)$.