Cálculo Diferencial e Integral III
1^{o} Semestre

Ficha de Problemas nº 9 (Aula Online)
Séries de Fourier e Método de Separação de Variáveis

1. Considere a função $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2\pi \le x \le 0 \\ -2x & \text{se} \quad 0 < x \le 2\pi \end{cases}$$

Determine a sua série de Fourier e estude-a quanto à convergência pontual em $\mathbb{R}$.

(2º Teste ACED 2014/15 2º Sem.)

2. Considere a função $f\colon [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Indique a soma da série para todo o $x \in \mathbb{R}$, e determine a soma da série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

(Exame ACED 2014/15 1º Sem.)

3. Considere a função f definida no intervalo $[0, 4]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \le x < 2 \end{cases}.$$

Calcule a sua série de Fourier de cossenos e indique a soma da série no intervalo $[-4, 4]$.

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de senos da função

$$f(x) = x - 2, \quad x \in [0, 4].$$

Estude a convergência pontual da série em $\mathbb{R}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial e valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (2 + 6t^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 4 \ , \ t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 4) = 0 & t > 0 \\ u(0, x) = f(x) & 0 < x < 4. \end{cases}$$

(2º Teste ACED 2017/18 1º Sem.)