Cálculo Diferencial e Integral III

1^{o} Semestre 2024/2025

Curso: LEQ, LEAmb, LEMat, LEIC-A, LEBiol, LEBiom

Ficha de Problemas nº 7

Integrais de Superfície e Operadores Diferenciais

1 Exercícios Propostos

1. Calcule a área da superfície dada por:

   (a) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$, $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u + v \leq 1$.

   (b) $g(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ e $u^2 + v^2 \leq 1$.

   (c) A superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se encontra no interior do cone $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (d) $g(u, v) = (\cos u, v, \operatorname{sen} u)$ e $u^2 + 4v^2 \leq 1$.

   (e) Porção da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 4$ que se encontra no interior do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e acima do plano xoy.

2. Considere a superfície parametrizada por

$$g(u, v) = (uv, u + v, u - v)$$

   (a) Determine o valor de c de forma que o ponto $(c, 1, 0)$ pertença à superfície

   (b) Admitindo que se restringe o domínio de g ao disco $u^2 + v^2 \leq 1$, calcule a área da parte da superfície correspondente.

3. Considere a superfície $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 4 - x^2 - z^2, y \geq -5\right\}$. Sendo a densidade em cada ponto de S dada por $\sigma(x, y, z) = 1/\sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}$, calcule a massa e as coordenadas do centro de massa de S.

4. Seja f um campo escalar e F um campo vectorial, ambos de classe C^2. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vectorial ou escalar.

   (a) $\operatorname{rot}(\nabla f)$

   (b) $\nabla(\operatorname{div} F)$

   (c) $\operatorname{div}(\operatorname{div} F)$

(d) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\nabla f))$

5. Determine o rotacional e a divergência dos seguintes campos vectoriais

   (a) $F(x,y,z) = (\log x, \log(xy), \log(xyz))$

   (b) $F(x,y,z) = (e^x \operatorname{sen} y, e^x \cos y, z)$

   (c) $F(x,y,z) = \left(0, e^{xy} \operatorname{sen} z, y \operatorname{arctg} \frac{x}{z}\right)$

6. Verifique as seguiuntes identidades sendo $\mathbf{r} = (x,y,z)$ e $r = |\mathbf{r}|$.

   (a) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$

   (b) $\nabla(\ln r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$

   (c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

   (d) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$

7. Calcule a massa e o centro de massa da superfície de um cone cujo raio da base é R e cuja altura é h. Admita que a densidade de massa é igual à distância do ponto ao eixo de simetria do cone.

8. Verifique se os seguintes campos vectoriais são irrotacionais e/ou incompressíveis:

$$F(x,y,z) = (yz, xz, xy) \quad , \quad G(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$$

2 Soluções

1. (a) $A(S) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (b) $A(S) = \pi\sqrt{3}$

   (c) $A(S) = \pi(2-\sqrt{2})$

   (d) $A(S) = \frac{\pi}{2}$

   (e) $A(S) = 16$

2. (a) $c = \frac{1}{4}$

   (b) $A(S) = \left(\sqrt{6} - \frac{4}{3}\right) 2\pi$

3. $M = 9\pi$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

4. (a) é um campo vectorial. (b) é um campo vectorial. (c) não tem significado pois div F é um campo escalar. (d) é um campo escalar.

5. (a) rot $F = \left(\frac{1}{y}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right)$ e div $F = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

   (b) rot $F = 0$ e div $F = 1$

(c) rot $F = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{z} - e^{xy}\cos z, -\frac{yz}{x^2+z^2}, ye^{xy}\operatorname{sen} z\right)$ e div $F = xe^{xy}\operatorname{sen} z - \frac{xy}{x^2+z^2}$

6.

7. $M = \frac{2}{3}\pi R^2\sqrt{R^2+h^2}$ e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{3}{4}h)$ (considerando um sistema de coordenadas em que o cone tem o vértice na origem e eixo Oz).

8. F é irrotacional e incompressível; G é irrotacional e não é incompressível.