Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre

Ficha de Problemas nº 5b (Aula Online)

Existência, Unicidade, Prolongamento, Comparação de Soluções e Parametrização de Superfícies

1. Estude os seguintes problemas de valor inicial quanto à existência de solução local. Utilizando o teorema de extensão de solução e o teorema de comparação de soluções, obtenha estimativas para os intervalos máximos de definição da solução.

(a) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+\cos^2(t-y)}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y^2(1+t^2 y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2. Sendo $\alpha \in \,]-2,2[$, considere o problema de valor inicial:

$$\big(e^y + 2y^2 + 10\big)y' = y^2 - 4 \qquad , \qquad y(0) = \alpha,$$

(a) Mostre que o problema de valor inicial tem solução única definida numa vizinhança de $t_0 = 0$. Indique as soluções constantes do problema.

(b) Para $\alpha = 1$, justifique que a solução do problema está definida em $\mathbb{R}$ e determine o valor de $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t)$.

3. Determine uma representação paramétrica das superfícies abaixo descritas.

(a) O plano que passa pelo ponto $(0,0,1)$ e contém os vectores $(1,0,-1)$ e $(0,2,2)$.

(b) A porção do cilindro $x^2 + z^2 = 4$ que se encontra entre os planos $y = -2$ e $y = 3$.

(c) A porção no primeiro octante do parabolóide $z = 2x^2 + 2y^2$ abaixo do plano $z = 8$.

(d) A parte do plano $z = \dfrac{x\sqrt{3}+1}{2}$ no interior do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.