Cálculo Diferencial e Integral III
1º Semestre

Ficha de Problemas nº 10 (Aula Online)
Equações Diferenciais Parciais

1. Considere o problema de valor inicial e fronteira para $u\colon [0,\pi]\times[0,+\infty[\to\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (2-\operatorname{sen} t)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \qquad \text{com} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

(a) Determine a série de cosenos de $f(x)$ indicando a soma da série para cada $x\in\mathbb{R}$.

(b) Resolva o problema de valor inicial e fronteira.

(2º Teste ACED 2012/13 1º Sem.)

2. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

(a) Determine a série de senos de $f(x)$ indicando os valores para os quais a série obtida converge, para cada $x\in\mathbb{R}$.

(b) Resolva o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0<x<2,\ t>0) \\ u(t,0) = u(t,2) = 0, \\ u(0.x) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = f(x). \end{cases} \qquad \text{para} \quad 0\leq x\leq 2 \quad \text{e} \quad t \geq 0)$$

(2º Teste ACED 2010/11 1º Sem.)

3. Determine a solução do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \\ u(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad u(x,\pi) = \operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(5x) \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{para} \quad 0\leq x\leq\pi \quad \text{e} \quad 0\leq y\leq\pi$$

(Exame ACED 2014/15 1º Sem.)