Cap. 4 Pares aleatórios (cont.)

4.5 Valores esperados e Variâncias

Par aleatório: $(X,Y): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Função: $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{E[h(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x,y)\, f_{X,Y}(x,y), & \text{discreto} \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx, & \text{contínuo} \end{cases}}$$

Casos particulares: $E[XY]$, $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

$$\boxed{E(X) = \sum_x \sum_y x\, f_{X,Y}(x,y) = \sum_x x \left(\sum_y f_{X,Y}(x,y)\right) = \boxed{\sum_x x\, f_X(x)}}$$

$$\boxed{E(X) = \int\int x\, f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx = \int x \left(\int f_{X,Y}(x,y)\, dy\right) dx = \boxed{\int x\, f_X(x)\, dx}}$$

Mais geralmente, $E(h(X))$ ou $E(h(Y))$ tanto podem ser calculados usando

- a função massa/densidade de probabilidade conjunta, $f_{X,Y}$
- a função massa/densidade de probabilidade marginal, f_X ou f_Y

Exemplo 1 (cont.)

X \ Y	0	1	2	P(X=x)
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
P(Y=y)	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$E(XY) = 0\times 0\times \frac{16}{36} + 2\times 0\times 1\times \frac{8}{36} + 2\times 0\times 2\times \frac{1}{36} + 1\times 1\times \frac{2}{36} = 1/18$$

$$E(X) = 0\times\frac{25}{36} + 1\times\frac{10}{36} + 2\times\frac{1}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

ou $X \sim Bin(2, 1/6) \Rightarrow E(X) = 2\cdot 1/6 = 1/3$

• Distribuição condicionais

$$X|Y=y \quad \text{qd } f_Y(y)>0 \quad \rightsquigarrow \quad f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

(i.e. "condicional = conjunta sobre marginal")

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Discreto: } E(X|Y=y) = \sum_x x \cdot f_{X|Y=y}(x) \\ &V(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - E^2(X|Y=y) = \sum_x x^2 \cdot f_{X|Y=y}(x) - (E(X|Y=y))^2 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Contínuo: } E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y=y}(x)\, dx \\ &V(X|Y=y) = E(X^2|Y=y) - E^2(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X|Y=y}(x)\,dx - (E(X|Y=y))^2. \end{aligned}}$$

Nota:

$E(X|Y)$ = v.a. com valor $E(X|Y=y)$ e função massa/densidade de probabilidade $f_Y(y)$, qd $f_Y(y)>0$.

Prop.: Se $E(X)$ existe então $E(E(X|Y))$ também existe e são iguais, i.e. $\boxed{E(X) = E(E(X|Y))}$

Dem.: Usando $\int_x$ para denotar tanto o $\sum_x$ no caso discreto como o $\int (\cdot)\,dx$ no caso contínuo:

$$E(X) = \int_x x\, f_X(x) = \int_x x \left(\int_y f_{X,Y}(x,y)\, dy \right) =$$

$$= \int_x x \int_y \left(f_Y(y) \cdot f_{X|Y=y}(x) \right) = \int_x \int_y \left(x\, f_Y(y)\, f_{X|Y=y}(x) \right) =$$

$$= \int_y f_Y(y)\left(\int_x x\, f_{X|Y=y}(x)\right) = \int_Y \left(f_Y(y)\; E(X|Y=y)\right) =$$

$$= E(E(X|Y))$$

Q.E.D.

Exemplo 1 (cont.)

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X=x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$P(Y=y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$$\boxed{E(Y|X)}$$

$$E(Y|X=0) = 0\cdot\frac{16/36}{25/36} + 1\cdot\frac{8/36}{25/36} + 2\cdot\frac{1/36}{25/36}$$

$$= 10/25 = 2/5 \quad \text{e} \quad f_X(0) = P(X=0) = 25/36$$

$$E(Y|X=1) = 0\cdot\frac{8/36}{10/36} + 1\cdot\frac{2/36}{10/36} + 2\cdot\frac{0}{10/36}$$

$$= 2/10 = 1/5 \quad \text{e} \quad f_X(1) = P(X=1) = \frac{10}{36}$$

$$E(Y|X=2) = 0 \quad \text{e} \quad f_X(2) = P(X=2) = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow E(E(Y|X)) = \frac{2}{5}\times\frac{25}{36} + 1/5\times\frac{10}{36} + 0\cdot\frac{1}{36} =$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} = E(Y)$$

4.6 Independência, covariância e correlação

Def.: Duas v.a.'s X e Y dizem-se independentes, simbolicamente $X \perp\!\!\!\perp Y$, se a sua função de distribuição conjunta é dada por

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\, F_Y(y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

o que é equivalente à sua função massa/densidade de probabilidade conjunta ser dada por $\boxed{f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.}$

Notas:

- $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)\,P(Y\in B),\ \forall A,B\subset\mathbb{R}$
- $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \begin{cases} f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y), & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ c/ } f_X(x)>0 \\ f_{X|Y=y}(x) = f_X(x), & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ c/ } f_Y(y)>0 \\ E(XY) = E(X)\,E(Y). \end{cases}$

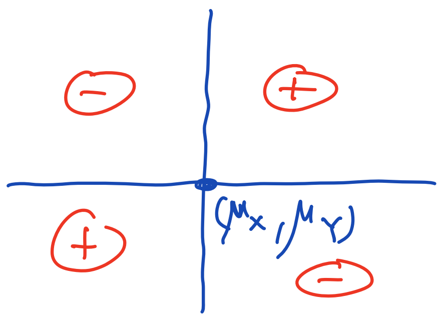
Def. A covariância de duas v.a.'s X e Y é dada por

$$\boxed{\sigma_{XY} \equiv \mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}.$$

A correlação ou coeficiente de correlação (linear) de X e Y é dada(o) por

$$\boxed{\rho_{X,Y} \equiv \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}}.$$

Notas:

- 

$\mathrm{cov}(X,Y) > 0 \Rightarrow X$ e Y variam em média no mesmo sentido

$\mathrm{cov}(X,Y) < 0 \Rightarrow X$ e Y variam em média em sentidos contrários

$\mathrm{cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow X$ e Y não estão linearm/ associados.

- $\rho_{X,Y}$ é adimensional e não se altera quando há mudanças de escala.

- Propriedades da covariância

(1) $\boxed{cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)}$

(2) $cov(X,Y) = cov(Y,X)$ e $cov(X,X) = Var(X)$

(3) $cov(aX+b,\ cY+d) = a \cdot c \cdot cov(X,Y)$

(4) $cov(X+Z,\ Y) = cov(X,Y) + cov(Z,Y)$

(5) $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow cov(X,Y)=0}$

(mas $cov(X,Y)=0 \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$)

- Propriedades da correlação

(1) $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$

(2) $\rho_{X,Y} = \underline{1} \iff Y = \underline{a}X+b$ com $\underline{a>0}$

$\rho_{X,Y} = \underline{-1} \iff Y = \underline{a}X+b$ com $\underline{a<0}$

(3) $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$

(mas $\rho_{X,Y}=0 \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$)

- Exemplo 1 (cont.)

X \ Y	0	1	2	$P(X=x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$P(Y=y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Já vimos que $E(XY) = 1/18$ e $E(X)=E(Y)=1/3$, pelo que

$$cov(X,Y) = \frac{1}{18} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18}$$

$X, Y \sim Bin(2, 1/6) \Rightarrow$

$$V(X) = V(Y) = np(1-p) = 2 \cdot \tfrac{1}{6}\,\tfrac{5}{6} = \frac{5}{18}$$

$$\Rightarrow corr(X,Y) = \frac{-1/18}{\sqrt{5/18 \cdot 5/18}} = -1/5 \quad (\underline{fraca}).$$

• **Exemplo** ($cov(X,Y) = corr(X,Y) = 0 \not\Rightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$)

X \ Y	-1	0	1	P(X=x)
-1	0	1/6	0	1/6
0	1/6	2/6	1/6	4/6
1	0	1/6	0	1/6
P(Y=y)	1/6	4/6	1/6	1

$E(XY) = 0$, $E(X) = E(Y) = 0$

$\Rightarrow cov(X,Y) = 0$

No entanto, X e Y não são independentes,

e.g. $\underbrace{f_{X,Y}(-1,-1)}_{=0} \neq \underbrace{f_X(-1) \cdot f_Y(-1)}_{=1/6 \cdot 1/6}$

• **Exercício 4.2**: considere o par aleatório contínuo (X,Y) com função densidade de probabilidade conjunta dada por
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) $corr(X,Y) = ?$

b) $V(X \mid Y=y) = ?$

c) Verifique que $E(X) = E[E(X|Y)]$.

Resolução: próxima aula.