Cap. 4 Pares aleatórios

Def.: Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e duas v.a.'s $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$, o par $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ é um par aleatório se

$$(X,Y)^{-1}(]-\infty, x] \times]-\infty, y]) \in \mathcal{A}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

A função de distribuição (cumulativa) de (X,Y) é a função $F_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ definida por

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

O par aleatório (X,Y) diz-se:

- discreto se X e Y forem v.a.'s discretas;
- contínuo se X e Y forem v.a.'s contínuas [e (*)].

Nota: a função de distribuição de um par aleatório tem propriedades análogas às da função de distribuição de uma v.a., e.g.

$$F_{X,Y}(x, -\infty) := \lim_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \text{e}$$

$$F_{X,Y}(x, +\infty) := \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

• 4.1 Par aleatório discreto – função de prob. conjunta

Def.: Se $(X,Y): \Omega \to \mathbb{R}^2$ é um par aleatório discreto com $R_{X,Y} = \{(x_i, y_j) : i,j \in \mathbb{N}\}$, a sua função (massa) de probabilidade conjunta $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ é dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = \begin{cases} P(X=x_i, Y=y_j), & (x,y)=(x_i,y_j)\in R_{X,Y} \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}$$

e satisfaz

$$\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j) = 1.$$

Nota: $$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i\leq x,\, y_j\leq y} f_{X,Y}(x_i,y_j).$$

Exemplo 1 Lançamento de 2 dados equilibrados

$X = \#$ de 5's, $R_X=\{0,1,2\}$; $Y = \#$ de 6's, $R_Y=\{0,1,2\}$

$X \sim Bin(2, 1/6)$ $\qquad$ $Y\sim Bin(2, 1/6)$

X e Y são identicamente distribuidas

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

$f_{X,Y}$

$P(X=0, Y=0) = 4/6 \times 4/6 = 16/36$

$P(X=0, Y=1) = 1/6 \times 4/6 \times 2 = 8/36$

$\quad\;\; = P(X=1, Y=0)$

$P(X=0,Y=2) = 1/6 \times 1/6 = \frac{1}{36} = P(X=2,Y=0)$

$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6}\times 1/6 \times 2 = 2/36$

$P(X=1,Y=2) = P(X=2,Y=1) = P(X=2,Y=2) = 0.$

$$F_{X,Y}(0,1) = P(X\leq 0, Y\leq 1) = P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)$$

$$= 16/36 + 8/36 = \frac{24}{36} = 2/3$$

(4.2) Par aleatório contínuo - função densidade de probabilidade conjunta

Def.: Um par aleatório (X,Y) diz-se **contínuo** se X, Y = v.a.'s contínuas e existe $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty[$ t.q.

$$\boxed{F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du.} \quad (*)$$

$f_{X,Y}$ = função de densidade de probabilidade conjunta (f.d.p. conjunta) do par aleatório (X,Y).

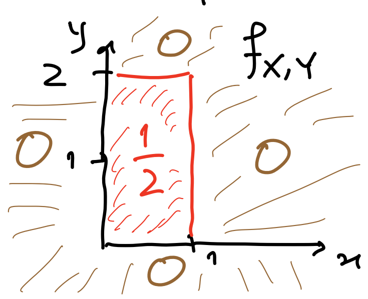
Notas:

(1) $D \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow P((X,Y)\in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$.

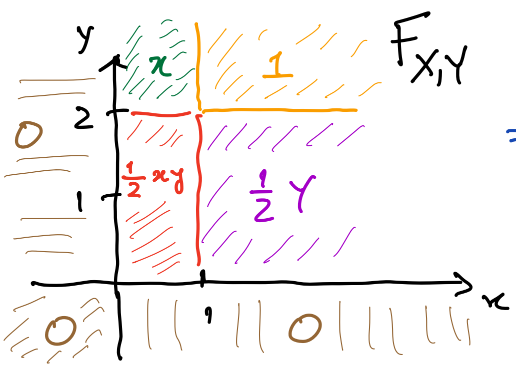
Em particular: $\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y} = 1.}$

(2) Se $f_{X,Y}$ é contínua então $F_{X,Y}$ tem derivadas parciais e $\boxed{f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x\,\partial y}(x,y)}$

Exemplo 2:



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$



$$\Rightarrow F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}xy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ x, & 0 \le x \le 1,\ y \ge 2 \\ \frac{1}{2}y, & x \ge 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 1, & x \ge 1,\ y \ge 2 \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$$

4.3 Distribuições marginais

Def.: Dado um par aleatório (X, Y) discreto/contínuo, com função massa/densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}$, as funções massa/densidade de probabilidade marginal de X e de Y são dadas por:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ Discreto: } f_X(x) = P(X=x) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X=x, Y=y_j) \\ \qquad\qquad\quad f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X=x_i, Y=y) \\ \bullet \text{ Contínuo: } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy \\ \qquad\qquad\quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx \end{array}}$$

Nota: as funções de distribuição marginal F_X e F_Y relacionam-se com f_X e f_Y da forma usual para uma v.a..

Exemplo 1 (cont.)

X \ Y	0	1	2	$P(X=x)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36} = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^2$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{10}{36} = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36} = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^0$
$P(Y=y)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

$X \sim Bin(2, 1/6)$

$Y \sim Bin(2, 1/6)$

Exemplo 2 (cont.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \begin{cases} \int_0^2 \frac{1}{2}\, dy = 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{2}\, dx = 1/2, & 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

I.e. $X \sim \text{Unif}(0,1)$, $Y \sim \text{Unif}(0,2)$.

4.4 Distribuições Condicionais

Discreto:

$$\boxed{f_{X|Y=y}(x)} = P(X=x \mid Y=y) = \frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \boxed{\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

Condicionais de X dado $Y=y$

se $P(Y=y) = f_Y(y) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{F_{X,Y=y}(x)} = \sum_{x_i \le x} P(X=x_i \mid Y=y) = \boxed{\frac{\sum_{x_i \le x} f_{X,Y}(x_i,y)}{f_Y(y)}}$$

Contínuo: se F_Y é dif. e $(F_Y)'(y) = f_Y(y) > 0$, então

$$\boxed{F_{X|Y=y}(x)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P(X \le x,\ y \le Y \le y+\varepsilon)}{P(y \le Y \le y+\varepsilon)} = \boxed{\frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,y)\, du}{f_Y(y)}}$$

Condicionais de X dado $Y=y$

exercício (Regra de Cauchy)

e $\boxed{f_{X|Y=y}(x)} = \left(F_{X|Y=y}\right)'(x) = \boxed{\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}}$

Exemplo 1 (cont.)

X \ Y	0	1	2	P(X=x)
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
P(Y=y)	25/36	10/36	1/36	1

$\boxed{Y \mid X=0}$

$P(Y=0 \mid X=0) = \dfrac{16/36}{25/36} = \dfrac{16}{25}$

$P(Y=1 \mid X=0) = \dfrac{8/36}{25/36} = \dfrac{8}{25}$

$P(Y=2 \mid X=0) = \dfrac{1/36}{25/36} = \dfrac{1}{25}$

$\boxed{X \mid Y=2}$

$P(X=0 \mid \ =2) = \dfrac{1/36}{1/36} = 1$

- **Exercício 4.1:**

Y \ X	1	2	3	P(Y=y)	$F_Y(y)$
1	1/9	0	1/18	3/18	3/18
2	0	1/3	1/9	8/18	11/18
3	1/9	1/6	1/9	7/18	18/18 = 1
P(X=x)	4/18	9/18	5/18	1	

$f_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 2/3, & x=1 \\ 1/3, & x=3 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$f_{X|Y=3}(x) = \begin{cases} 2/7, & x=1,3 \\ 3/7, & x=2 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

(a) Determine

(i) A função de probabilidade marginal de X

(ii) A função de distribuição marginal de Y

(iii) $P(X+Y \leq 4) = 1/9 + 1/9 + 1/3 + 1/18 = 11/18$

(iv) $f_{X|Y=1}$ e $f_{X|Y=3}$

(v) $E(X \mid Y=1) = 2/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 3 = 5/3$