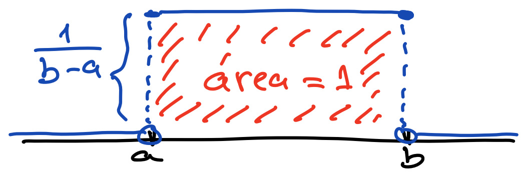
Cap. 3 Variáveis aleatórias discretas e contínuas (cont.)

3.6 Distribuições de probabilidade contínuas mais utilizadas (uniforme, exponencial, normal)

• **Def.:** Uma v.a. X contínua tem distribuição uniforme contínua (ou rectangular) no intervalo $[a,b]$, i.e. $X \sim \text{Unif}(a,b)$, se a sua f.d.p. é da forma

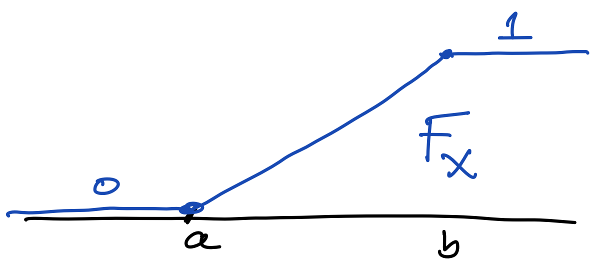
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



$$\Longrightarrow \quad \mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_X^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Nota:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b < x \end{cases}$$

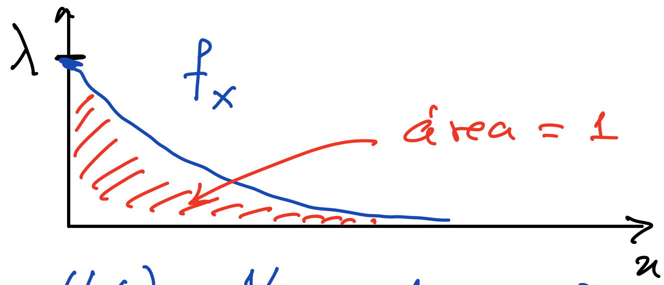


Exemplo: Seja $X \sim \text{Unif}(-2,2)$. $P(|X-1| > 1/2) = ?$

$$\begin{aligned} P(|X-1| > 1/2) &= P(X > 3/2 \ \vee \ X < 1/2) \\ &= P(X > 3/2) + P(X < 1/2) \\ &= 1 - F_X(3/2) + F_X(1/2) \\ &= 1 - \frac{3/2 - (-2)}{2-(-2)} + \frac{1/2 - (-2)}{2 - (-2)} = 3/4 \end{aligned}$$

• **Def.**: Uma v.a. X contínua tem distribuição exponencial de parâmetro $\lambda > 0$, i.e. $X \sim Exp(\lambda)$, se a sua f.d.p. for dada por

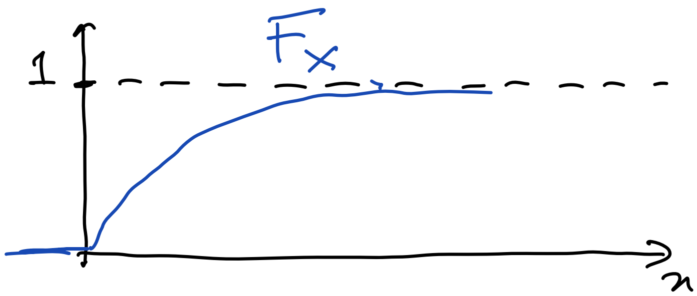
$$\boxed{f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}}$$



$$\Rightarrow \mu_X = E(X) = 1/\lambda \;, \quad \sigma_X^2 = V(X) = 1/\lambda^2 \quad (\sigma_X = 1/\lambda)$$

Nota:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{P(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = P(X > t_2)} = \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_1)} = \frac{e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t_2}$$

← Falta de memória (ou amnésia) da distribuição exponencial

⇒ não indicada para modelar situações do tipo "tempo de vida" em que há desgaste ou envelhecimento.

<u>Exemplo</u>: Sabe-se que o intervalo de tempo médio entre chamadas num "call center" é de 12 minutos e que esse tempo tem distrib. exponencial.

$T =$ tempo (em horas) entre chamadas

$$E(T) = 1/5 \implies T \sim Exp(5)$$

a) Mediana e desvio padrão de T?

b) Prob. de T ser superior a 20 minutos?

a) $E(T) = 1/5 \implies \sigma_X = 1/5$

$$F_T(t) = 0.5 \iff 1 - e^{-5t} = 0.5 \iff e^{-5t} = 0.5$$

$$\iff e^{5t} = 2 \iff 5t = \log(2) \iff t = \frac{\log(2)}{5} \simeq 0.13863$$

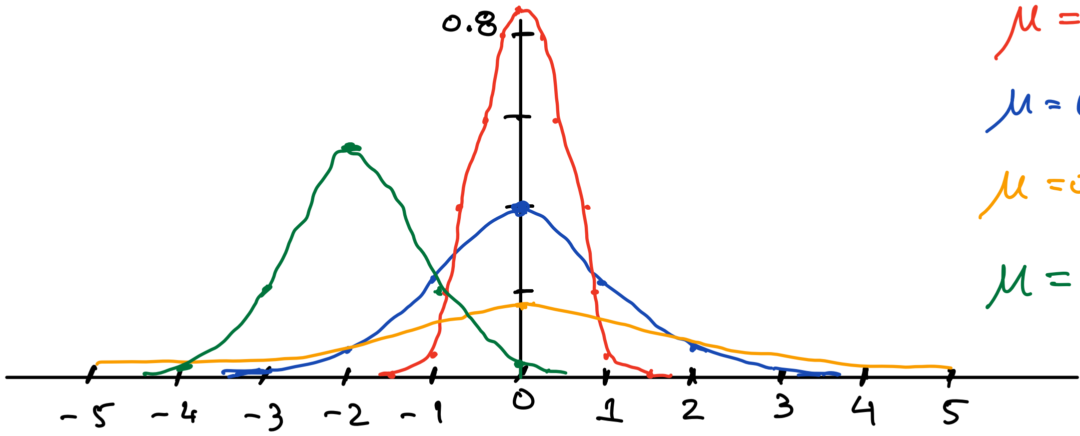
$\implies$ Mediana $\simeq 8.3$ minutos

b) $20 \text{ min} = \frac{1}{3} h \implies P(T > 1/3) = e^{-5/3} \simeq 0.1888756$

[Em R: $1 - \text{pexp}(1/3, 5) \rightarrow 0.1888756$]

• <u>Def.</u>: Uma v.a. X contínua tem distribuição normal de parâmetros $\mu \in \mathbb{R}$ e σ^2, com $\sigma > 0$, i.e. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua f.d.p. for dada por

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \implies E(X) = \mu \quad e \quad V(X) = \sigma^2.}$$



Nota: f_X é simétrica em relação a $x=\mu$ pelo que

$$\boxed{\mu_o(X) = \mu_e(X) = \mu}$$

Prop.: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y = aX+b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, então

$$Y \sim N(a\mu+b,\ a^2\sigma^2).$$

Dem.: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX+b \leq y) = P(aX \leq y-b)$

$$= \begin{cases} P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases} = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ \frac{d}{dy}\left(1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right), & a<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a>0 \\ -\frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & a<0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{|a|} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(y-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2}\right]$$

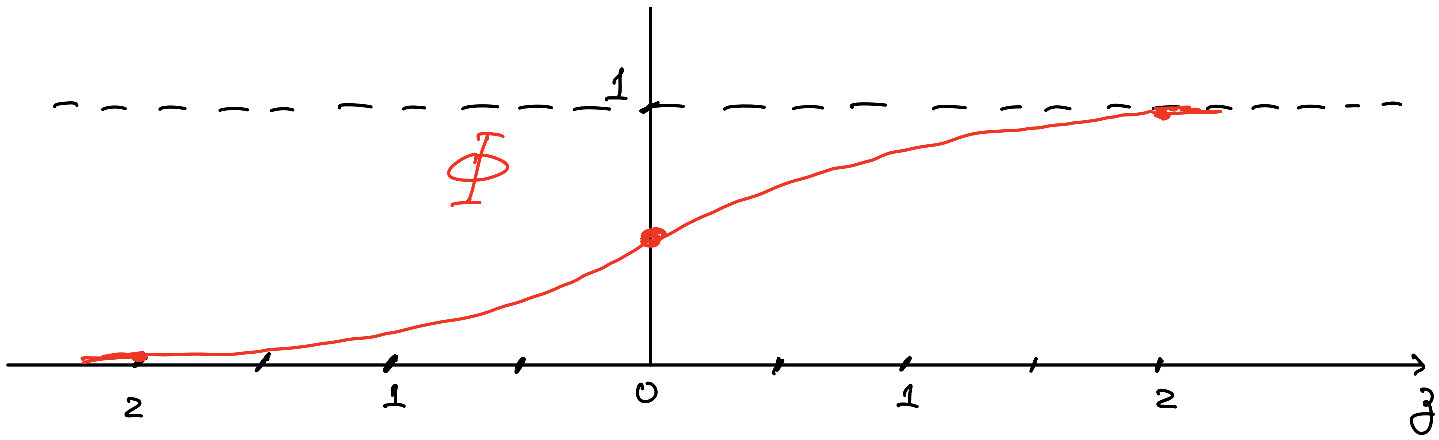
Q.E.D.

Caso especial: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $a = \frac{1}{\sigma}$ e $b = -\frac{\mu}{\sigma}$

$\Rightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \equiv$ normal padrão, normal standard, normal reduzida

com função de distribuição

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt \quad \text{(cf. tabela)}$$



$\Phi(1.96) = 0.975 \Rightarrow P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$

Notas: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (pela simetria da f.d.p)

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \boxed{F_X(x)} = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \boxed{\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$

e $\boxed{P(a < X < b)} = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \boxed{\phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)}$

- Exemplo Uma empresa fabrica um tipo de lâmpada cuja duração média é 300 dias com um desvio padrão de 50 dias. Supondo que a duração deste tipo de lâmpadas tem uma distribuição normal, calcule

(a) a prob. de uma lâmpada durar mais de um ano;

(b) a duração que é excedida por 95% das lâmpadas.

(a) T = duração de uma lâmpada em dias

$\Rightarrow T \sim N(\mu = 300, \sigma^2 = 50^2)$

$$P(T>365) = 1 - P(T \leq 365) = 1 - F_T(365) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{365-300}{50}\right) = 1 - \phi\left(\frac{65}{50}\right) = 1 - \phi(1.3) = 1 - 0.9032$$

$$= \underline{\underline{0.0968}} \quad (\sim 10\%)$$

(b) $P(T > t_{0.05}) = 1 - P(T \leq t_{0.05}) = 0.95$

$$\Leftrightarrow P(T \leq t_{0.05}) = 0.05 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{t_{0.05}-300}{50}\right) = 0.05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{300 - t_{0.05}}{50}\right) = 0.95 \underset{(\text{tabela})}{\Leftrightarrow} \frac{300 - t_{0.05}}{50} = 1.6449$$

$$\Leftrightarrow t_{0.05} = 300 - 50 \times 1.6449 = 217{,}755 \text{ dias} /\!/$$

- Exercício 3.3 $\quad X \sim N(10, 2^2)$

$$P(8 \leq X \leq 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{2}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2(0.8413) - 1$$

$$= 0.6826 /\!/$$

- Exercício 3.4: $\quad T \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{0.5} = 2\right), \; E(T) = 0.5$

(a) Calcule F_T.

(b) Calcule $P(T > 1.5 \mid T > 0.5)$

$$P(T>t) = e^{-\lambda t} = e^{-2t} \Rightarrow F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} /\!/$$

$$P(T>1.5 \mid T>0.5) = P(T>1) = e^{-2} /\!/$$