Cap. 3 Variáveis aleatórias discretas e contínuas (cont.)

3.5 Distribuições de probabilidade discretas mais utilizadas (Bernoulli, binomial, geométrica, Poisson)

• **Def.:** Uma e.a. diz-se uma prova de Bernoulli se só tem dois resultados possíveis:

- sucesso, com probabilidade $p \in [0,1]$;
- insucesso, com probabilidade $1-p \in [0,1]$.

A v.a. X discreta definida por

$$X(\text{sucesso}) = 1 \quad \text{e} \quad X(\text{insucesso}) = 0$$

tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p, i.e.

$X \sim Ber(p)$:

$$\boxed{P(X=x) = \begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \equiv \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x=0,1 \\ 0, & \text{c.c} \end{cases} \qquad E(X) = p, \quad V(X) = p(1-p)}$$

Exemplo 1: Urna com N bolas, das quais M brancas e $(N-M)$ pretas. E.a. = extrair uma bola ao acaso. X = v.a. dada por $X(\text{branca}) = 1$, $X(\text{preta}) = 0$.

$$\Longrightarrow X \sim Ber\left(p = M/N\right).$$

• **Def.:** X = v.a. discreta que indica o # de sucessos em n provas de Bernoulli independentes e com a mesma probabilidade de sucesso p.

X tem distribuição binomial de parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim Bin(n,p)$:

$$\boxed{P(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases}}$$

com $\binom{n}{x} = C^n_x = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$. Tem-se

$$\boxed{E(X) = np,\ V(X) = np(1-p),\ \text{tabela com } F_X(x) = P(X \le x).}$$

Notas

- $X \sim Bin(n,p) \iff Y = n - X \sim Bin(n, 1-p)$
- $Bin(1,p) = Ber(p)$
- $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$ (binómio de Newton)

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = (p + (1-p))^n = 1.$$

- $P(X=x) = P(X \le x) - P(X \le x-1) = F_X(x) - F_X(x-1)$

tabela

Exemplo 1 (urna, cont.): $N = 100$, $M = 20$, $n = 3$

$X \sim Bin(3, 0.2)$. Probabilidade de no máximo 1 bola branca?

$P(X \le 1) = F_X(1) = 0.896$ (cf. tabela).

Exemplo 2 Numa população muito grande sabe-se que 50% são a favor de jogos eletrónicos infantis.

Em 10 pessoas selecionadas ao acaso, qual é a prob. de 6 serem a favor dos jogos? E a prob. de pelo menos 6 serem a favor dos jogos?

X = # pessoas a favor dos jogos $\sim Bin(10,\ 0.5)$

[10 provas de Bernoulli consideradas independentes e com a mesma probabilidade de sucesso por a população ser muito grande]

$P(X=6) = F_X(6) - F_X(5) = 0.8281 - 0.6230 = 0.2051$

[Em R: dbinom (6, 10, 0.5) $\longrightarrow$ 0.2050781]

$P(X \geq 6) = 1 - F_X(5) = 1 - 0.6230 = 0.3770$

[Em R: 1 − pbinom (5, 10, 0.5) $\rightarrow$ 0.3769531]

- Def.: X = v.a. discreta que indica o # de provas de Bernoulli, independentes e com a mesma prob. de sucesso p, realizadas até se obter o 1º sucesso (inclusive).

  X tem distribuição geométrica de parâmetro $p \in [0,1]$, i.e. $X \sim Geom(p)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(X=x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p, & x = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & c.c. \end{cases} \\[2ex] E(X) = 1/p,\ V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}. \end{array}}$$

Nota 1: $\boxed{P(X>x) = \sum_{k=x+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = p \frac{(1-p)^x}{1-(1-p)} = (1-p)^x}$

$$\Rightarrow \boxed{P(X>x+y \mid X>y) = P(X>x)} = \frac{P(X>x+y)}{P(X>y)} = \frac{(1-p)^{x+y}}{(1-p)^y} = (1-p)^x$$

$\leftarrow$ Falta de memória da distribuição geométrica

Nota 2: $Y = X-1$ = # de insucessos antes do 1.º sucesso

$$\Rightarrow P(Y=y) = P(X=y+1) = (1-p)^y p$$

[implementação da distrib. geométrica em R]

Exemplo 3:

X = v.a. que indica # de lançamentos de um dado até sair um primeiro 3.

$$\Rightarrow X \sim Geom(1/6), \quad E(X) = 6, \quad V(X) = \frac{5/6}{1/6^2} = 30$$

$$P(X>10 \mid X>7) = P(X>3) = (1-1/6)^3 = \frac{5^3}{6^3} \simeq 0.5787037$$

[$P(X>3) = 1 - P(X\le 3) = 1 - P(Y\le 2)$, $Y = X-1$

Em R: 1 - pgeom(2, 1/6) $\to$ 0.5787037]

- **Distribuição de Poisson**

Muito usada para v.a.'s que indicam o # de ocorrências de um acontecimento por unidade de tempo ou de espaço, e.g.

- # de acidentes por semana num det. cruzamento;
- # de clientes que chegam a uma loja num

det. intervalo de tempo;

- # de defeitos num def. conjunto de peças produzidas em série.

Def.: Uma v.a. X tem distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda > 0$, i.e. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, se

$$\boxed{P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}}$$

$$\boxed{E(X) = V(X) = \lambda.}$$

$\left[\text{Nota: } \sum_{x=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^x}{x!} = e^{\lambda}\right]$

Nota: tabela c/ $F_X(x)$ p/ alguns valores de $\lambda \leq 40$.

Exemplo 4 Sabe-se que a média do # de defeitos num tecido com $5\,m^2$ é 10.

X = v.a. que indica o # de defeitos por $5\,m^2$ de tecido e vamos admitir que tem distrib. Poisson

$P(X=0)$? $P(X=10)$? $P(X \geq 10)$?

Como $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $E(X) = 10 = \lambda$, temos que $X \sim \text{Poisson}(10)$.

$$P(X=0) = e^{-10} \simeq 0.$$

$$P(X=10) = F_X(10) - F_X(9) = 0.5830 - 0.4579 = $$
$$= 0.1251$$

[Em R: dpois(10, 10) $\longrightarrow$ 0.12511]

$P(X \geq 10) = 1 - F_X(9) = 1 - 0.4579 = 0.5421$

[Em R: $1 - \text{ppois}(9, 10) = 0.5420703$]

Exemplo 5 ($Bin(n,p)$ vs $Poisson(np)$ para n grande ($n > 20$) e p pequeno ($p < 0,1$))

Um canal de comunicação digital tem uma taxa de erro de 10^{-7}, i.e. a prob. de um bit chegar trocado ao destino é 10^{-7}. Para uma transmissão de 10 milhões de bits (1.25 MB), calcular

a) prob. de zero erros;

b) prob. de no máximo 4 erros;

c) o valor esperado, a moda e a mediana do nº de erros nessa transmissão.

X = # erros na transmissão de 10^7 bits $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \sim Bin(n = 10^7, p = 10^{-7})$ / $Poisson(np = 1)$

$$P(X=0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1 - 10^{-7})^{10^7} = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \simeq e^{-1} = 0.36787944$$

$$P(X=0) = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} = e^{-1}$$

$$P(X=1) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = 10^7 \times 10^{-7} \cdot (1 - 10^{-7})^{10^7 - 1} = \frac{(1 - 1/10^7)^{10^7}}{1 - 1/10^7} \simeq 0.3678795$$

$$P(X=1) = \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = e^{-1}$$

pbinom(4, 10^7, 10^(-7)) $\longrightarrow$ 0,9963402

ppois(4, 1) $\longrightarrow$ 0,9963402 (tabela dá 0.9963)

$E(X) = 1, \ M_o = 1, \ M_e = 1$