Cap. 3 Variáveis aleatórias discretas e contínuas (cont.)

3.4 Medidas de localização e de dispersão

• **Def.**: O valor esperado (ou valor médio ou média) de uma v.a. discreta/contínua X, com função massa/densidade de probabilidade f_X, denota-se por $E(X)$ (ou μ_X ou μ) e é dado por

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x f_X(x), & \text{se } X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx, & \text{se } X \text{ contínua} \end{cases}$$

(assumindo $\sum_x |x| f_X(x) / \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\,dx$ finitos).

Nota: em geral

$$E[h(X)] = \sum_x h(x) f_X(x) / \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x)\,dx \neq h[E(X)].$$

Em particular $E\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{E(X)}$ e $E(|X|) \neq |E(X)|$

No entanto, dadas constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\boxed{E(aX+b) = a\,E(X) + b}$$ linearidade do valor esperado

[consequência da linearidade do $\sum / \int$ e de $\left(\sum_x f_X(x) / \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx\right) = 1$]

• Exemplo 2 da última aula (cont.)

V.a. Y discreta, com $P(Y=0) = P(Y=2) = 1/4$ e

$P(Y=1)=1/2$, que representa o nº de coroas no lançamento de duas moedas equilibradas.

<u>Jogo</u>: paga-se um preço para lançar as duas moedas e recebe-se um prémio de Y^2 euros.

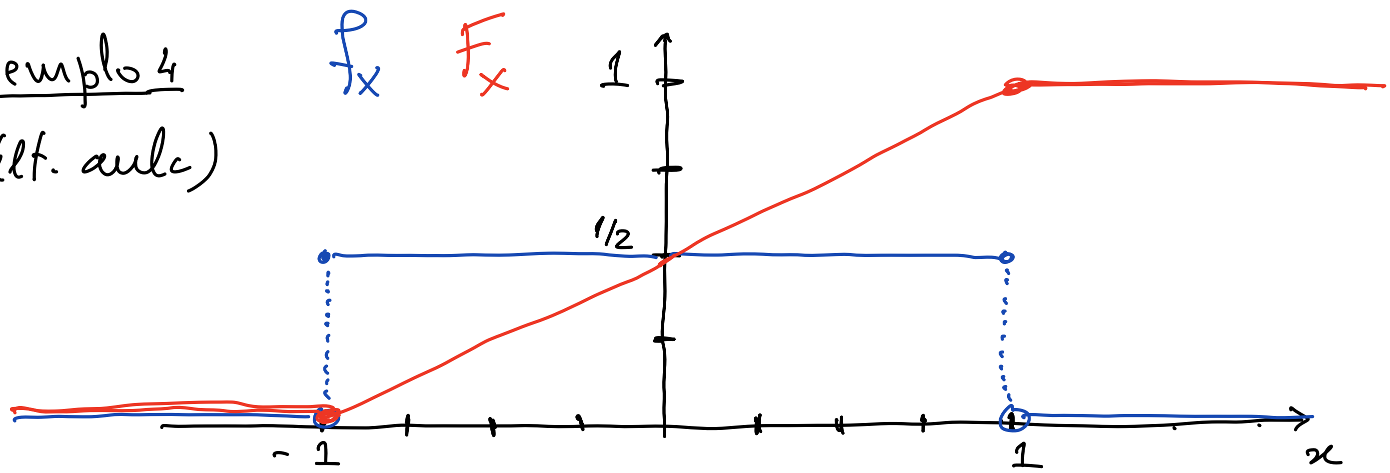
<u>Pergunta</u>: qual o preço justo a pagar?

$$E(Y^2) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1/4 = \underline{\underline{1,5 \text{ euros}}}$$

<u>Nota</u> $E(Y^2) \neq (E(Y))^2 = (1)^2 = 1$

<u>Exemplo 4</u>

(últ. aula)



$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x \cdot 1/2\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{1} = 1/4 - 1/4 = \underline{\underline{0}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1/2\, dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = 1/6 - (-1/6) = 1/3 //$$

- <u>Def.</u>: A **moda** de uma v.a. discreta/contínua X, com função de probabilidade f_X, denota-se por M_o ou $M_o(X)$ e é o valor ou valores onde f_X tem <u>máximo</u> absoluto, i.e.

$$\boxed{f_X(M_o) = \max_{x} f_X(x)}$$

Nota: a moda pertence a R_X e pode não ser única (cf. Exemplo 4). Podem definir-se modas relativas, correspondentes a máximos relativos.

Exemplo 3 (últ. aula): Lançamentos sucessivos de um dado equilibrado até sair face 6

$$f_X(x) = \begin{cases} (5/6)^{x-1} \cdot 1/6 \,, & \text{se } x \in \mathbb{N} \\ 0 \,, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ moda $\mu_0 = 1$.

• **Def.** Um quantil de ordem (ou probabilidade) p, com $p \in]0,1[$, de uma v.a. X com função de distribuição F_X, é um número real q_p tal que $P(X \leq q_p) \geq p$ e $P(X \geq q_p) \geq 1-p$, o que é equivalente a

$$F_X(q_p^-) \leq p \leq F_X(q_p)$$

Para uma v.a. X contínua, isto é equivalente a

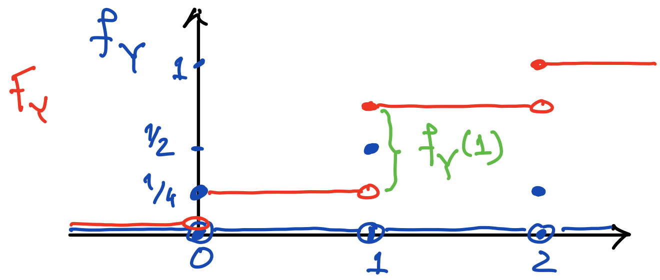
$$F_X(q_p) = p.$$

A mediana é um quantil de ordem $p = 1/2$ e denota-se por μ_e ou $Md(X)$.

Os quartis são os quantis de ordem $p = 1/4, 2/4, 3/4$.

Nota: os quantis podem não ser únicos.

Exemplo 2 (cont.)



$\mu_e = q_{1/2} = 1$

$q_{1/4} = [0, 1]$

$q_{3/4} = [1, 2]$

Exemplo 4 (cont.): $q_{1/4} = -1/2$, $\mu_e = q_{1/2} = 0$, $q_{3/4} = 1/2$.

- **Def.** A variância de uma v.a. discreta/contínua, com função de probabilidade f_X e cujo valor esperado $E(X) = \mu_X$ existe, denota-se por $V(X)$, $var(X)$, σ_X^2 ou σ^2 e é dado por

$$\boxed{V(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right]} = \begin{cases} \sum_x (x-\mu_X)^2 f_X(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)\,dx \end{cases}$$

O desvio padrão de X denota-se por σ_X e é dado por $\boxed{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$.

[σ_X tem as mesmas unidades de X.]

Nota: A variância/desvio padrão podem não existir.

Propriedades:

1. $V(X) \geq 0$ [óbvio]
2. $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ $\quad [V(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2.]$

Nota: ① + ② $\Rightarrow$ $E(X^2) \geq (E(X))^2 = \mu_X^2$.

③ $V(aX+b) = a^2 V(X)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ [...]
(a variância não é linear).

④ $V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ é uma v.a. constante ou degenerada, i.e. $\exists_{c\in\mathbb{R}}: P(X=c) = 1$.

• Exemplo (discreto)

X:

x	-1	1	c.c.
$f_X(x)$	$1/2$	$1/2$	0

Y:

y	-1000	1000	c.c.
$f_Y(y)$	$1/2$	$1/2$	0

$E(X) = 0$ $E(Y) = 0$

$E(X^2) = 1$ $E(Y^2) = 1000^2$

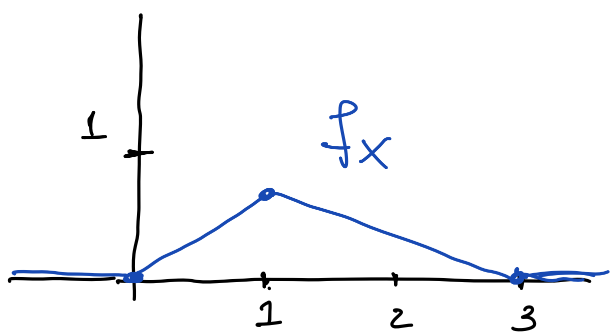
$V(X) = 1$ $V(Y) = 1000^2$

$\sigma_X = 1$ $\sigma_Y = 1000$

• Exemplo (contínuo)

A procura diária de arroz num supermercado, em centenas de quilos, é uma v.a. com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x/3, & 0 \leq x < 1 \\ -x/3 + 1, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$



(a) $E(X) = ?$ $\sigma_X = ?$

(b) Qual a quantidade de arroz que deve ser deixada diariamente à disposição do público p/ que não falte arroz em 95% dos dias?

(a) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2x}{3}\,dx + \int_1^3 x\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx$

$= \left[\frac{2x^3}{9}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9}\right]_1^3 = \frac{2}{9} + \left[9/2 - 3 - \left(\frac{1}{2} - 1/9\right)\right]$

$= 2/9 + 1 + 1/9 = 1 + 1/3 = 4/3 = 1,(3)$ (centenas de Kg)

$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \frac{2x}{3}\,dx + \int_1^3 x^2\left(-\frac{x}{3}+1\right)dx$

$= \left[\frac{x^4}{6}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left[27 - \frac{81}{4} - \left(1 - 1/4\right)\right] =$

$= 1/6 + \frac{1}{3}\left[26 - 20\right] = 1/6 + 2 = 13/6$ (centenas de Kg)^2

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{13}{6} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{13}{6} - \frac{16}{9} = 7/18$

$\sigma_X = \sqrt{\frac{7}{18}} \simeq 0,6236$ (centenas de Kg).

(b) Queremos determinar $x \in \mathbb{R}$ t.q. $P(X \leq x) =$
$= 0,95$, i.e. t.q. $F_X(x) = 0,95$, i.e.
t.q. $x = q_{0,95}$ = quantil de probabilidade 0,95.

Para $1 < x < 3$ temos que

$F_X(x) = \frac{1}{3} + \int_1^x \left(1 - t/3\right)dt = 1/3 + (x-1) - \left[\frac{t^2}{6}\right]_1^x =$

$= x - 2/3 - \frac{x^2}{6} + 1/6 = -\frac{x^2}{6} + x - 1/2$

$-\frac{x^2}{6} + x - 1/2 = \frac{95}{100} \Leftrightarrow \frac{x^2}{6} - x + \frac{29}{20} = 0 \Leftrightarrow 10x^2 - 60x + 87 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{30}}{10} = 3 \pm 0,5477 \Rightarrow q_{0,95} = 2,4533$, i.e.
cerca de 245 Kg de arroz.