Cap. 3 Variáveis aleatórias discretas e contínuas

Def.: Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ uma variável aleatória (v.a.) é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto X(\omega)$, t.q.
$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ para qq $x \in \mathbb{R}$
(i.e. X^{-1} (σ-álgebra de Borel) $\subset \mathcal{A}$).

Nota: $P(X=x) = P(X(\omega)=x) = P(X^{-1}(x)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$

3.1 Função de distribuição e tipos de variáveis aleatórias

Def. A função de distribuição (cumulativa) de uma v.a. X é a função $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por
$F_X(x) = P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P(X \leq x)$.

Propriedades:

① $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

② F_X é crescente, i.e. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

③ $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

④ F_X é contínua à direita, i.e. $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

⑤ $P(X=x_0) = F_X(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) \; (= F_X(x_0) - F_X(x_0^-))$

⑥ $P(x_0 < X \leq x_1) = F_X(x_1) - F_X(x_0)$, $\forall x_0 < x_1$.

Def.: D_X = conj^to^ dos pontos de descontinuidade de F_X.
- A v.a. X diz-se discreta quando $P(X \in D_X) = 1$.
- A v.a. X diz-se contínua quando $D_X = \emptyset$ [e (*)].
- A v.a. X diz-se mista quando $P(X \in D_X) < 1$ e $D_X \neq \emptyset$.

Nota: $R_X = X(\Omega) = \{\text{contradomínio de } X\} \subset \mathbb{R}$

Se R_X é finito ou numerável então X é discreta.

Exemplo 1: Tempo de vida de um componente, $\Omega = [0, +\infty[$

- V. a. T = tempo de vida (h), i.e. $T : \Omega = [0, +\infty[\to \mathbb{R}$

  $T(\omega) = \omega$, $R_T = [0, +\infty[$, contínua ou mista

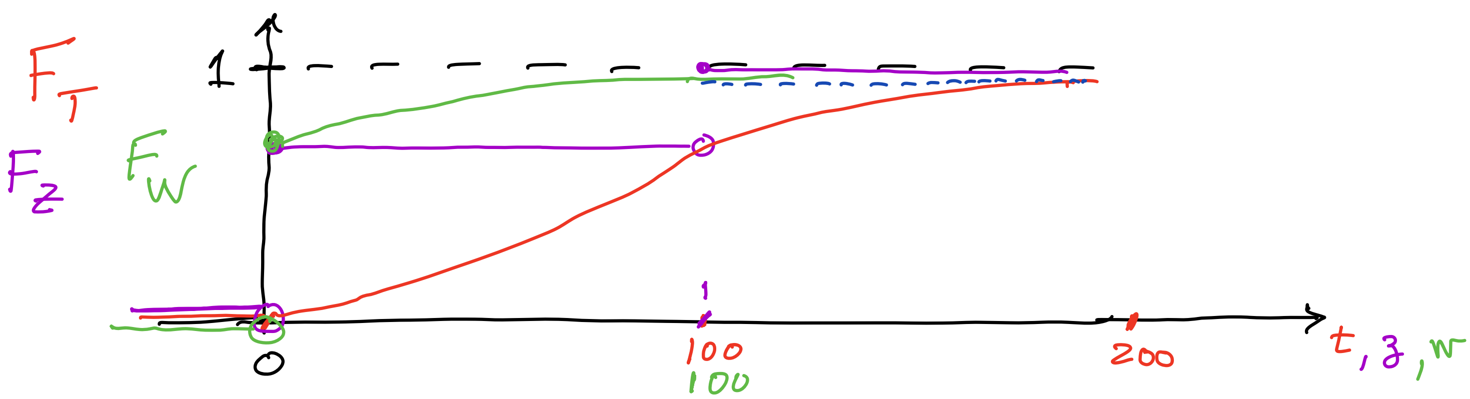
- V. a. Z que indica se T é maior ou não do que 100 h,

  i.e. $Z(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \leq 100 \\ 1, & \text{se } \omega > 100 \end{cases}$, $R_Z = \{0, 1\}$, discreta

- V. a. W definida por $W(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } \omega \leq 100 \\ \omega - 100, & \text{se } \omega > 100 \end{cases}$

  $R_W = \{0\} \cup]0, +\infty[$ e W é mista.

- Funções de distribuição



3.2 V. a. discreta - função de probabilidade

Def.: Se $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma v. a. discreta com $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$, a sua função (massa) de probabilidade $f_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ é dada por

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{se } x = x_i \in R_X \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

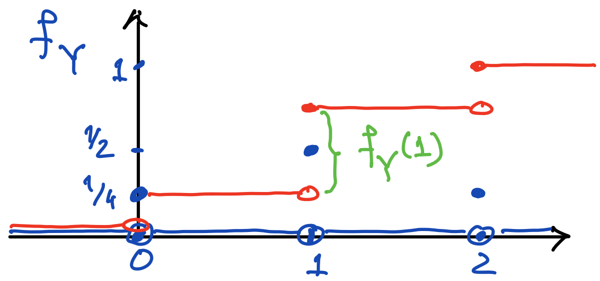
e satisfaz $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) = \sum_{x\in R_X} f_X(x) = 1$.

<u>Nota</u>: $F_X(x) = P(X\le x) = \sum_{x_i\le x} P(X=x_i) = \sum_{x_i\le x} f_X(x_i)$

<u>Exemplo 2</u>: Lançamento de duas moedas equilibradas

$\Omega = \{(F,F),(F,C),(C,F),(C,C)\}$, Y = # de coroas (C),

$R_Y = \{0,1,2\}$, discreta



<u>Exemplo 3</u>: Lançamentos sucessivos de um dado equilibrado até sair face 6

$\Omega = \{(6),(1,6),\dots,(5,6),(1,1,6),(1,2,6),\dots,(5,5,6),\dots\}$

X = # de lançamentos, $R_X = \mathbb{N}$, discreta

$f_X(1) = P(X=1) = 1/6$

$f_X(2) = P(X=2) = 5/6 \times 1/6$

$f_X(3) = P(X=3) = (5/6)^2 \times 1/6$

...

$$f_X(x) = \begin{cases} (5/6)^{x-1}\cdot 1/6, & \text{se } x\in\mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

<u>Nota</u>: $\sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot 1/6 = \frac{1/6}{1-5/6} = 1$

(soma de série geométrica de razão 5/6 e 1º termo 1/6)

3.3 V. a. contínua – função densidade de probabilidade

Def.: Seja X uma v.a. e $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ a sua função de distribuição. A v.a. X diz-se contínua se F_X é contínua (i.e. $D_X = \emptyset$) e existe $f_X : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ t.q.

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.} \quad (*)$$

Nesse caso, a função f_X é designada por função de densidade de probabilidade da v.a. X. (f.d.p.)

Notas:

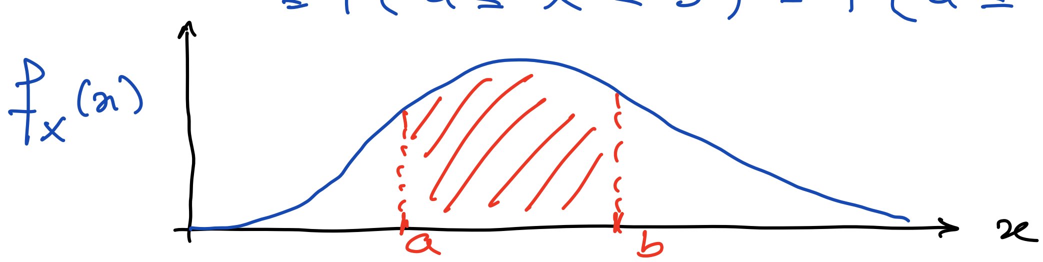
(0) $$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt := \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

(1) $$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$$

(2) Se f_X é contínua então F_X é dif. e $(F_X)'(x) = f_X(x)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, e portanto $$f_X(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P\left(x - \frac{h}{2} < X < x + \frac{h}{2}\right)}{h}.$$

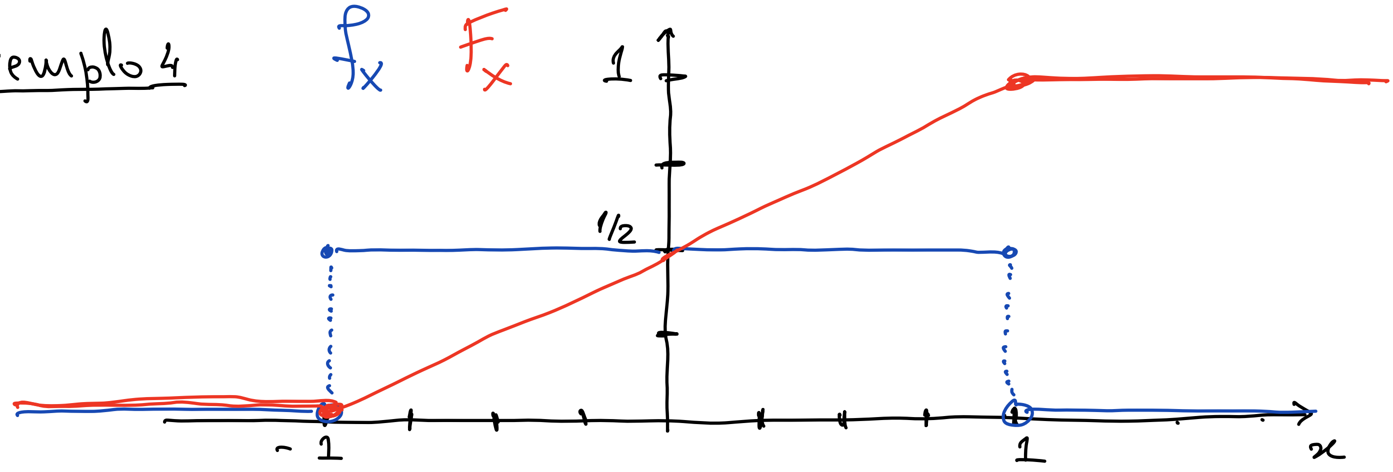
(3) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$ temos que

$$\int_{a}^{b} f_X(t)\,dt = F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b) =$$
$$= P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$



Em particular, $P(X=x) = \int_x^x f_X(t)\,dt = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Exemplo 4



Exemplo 5:

V. a. X = tempo de vida (em milhares de horas) de um componente electrónico

F.d.p.: $f_X(x) = \begin{cases} k e^{-x/5}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

(a) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$.

- $f_X \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x k e^{-t/5}\,dt = 1$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} k \left[-5e^{-t/5}\right]_0^x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} k\left[-5e^{-x/5} + 5\right] = 1$

$\Leftrightarrow 5k = 1 \Leftrightarrow \boxed{k = 1/5}$

(b) $F_X(x) = ?$

- $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$

- $x \geq 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{5}(e^{-t/5})\,dt = \left[-e^{-t/5}\right]_0^x =$

$$= -e^{-x/5} + 1 = 1 - e^{-x/5}$$

(c) $P(X>70 \mid X>60) = ?$

$$P(X>70 \mid X>60) = \frac{P((X>70) \wedge (X>60))}{P(X>60)} =$$

$$= \frac{P(X>70)}{P(X>60)} = \frac{1-P(X\leq 70)}{1-P(X\leq 60)} = \frac{1-F_X(70)}{1-F_X(60)}$$

$$= \frac{e^{-70/5}}{e^{-60/5}} = e^{-2}$$