2.5 Acontecimentos independentes

Intuitivamente, dois acontecimentos $A, B \subset \Omega$ são independentes se o facto de um deles ocorrer não alterar a probabilidade do outro também ocorrer, i.e.

$$P(A|B) = P(A) \quad e \quad P(B|A) = P(B).$$

Estas igualdades só fazem sentido se $P(B), P(A) > 0$, mas qualquer uma delas implica que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

que faz sentido mesmo qd $P(A)=0$ ou $P(B)=0$.

Def.: Dois acontecimentos $A, B \subset \Omega$ são independentes ($A \perp\!\!\!\perp B$) se $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$.

Consequências imediatas desta definição:

- Se $A \subset \Omega$ é t.q. $P(A) = 0$ então $A \perp\!\!\!\perp B$, $\forall B \subset \Omega$.
- $A \perp\!\!\!\perp \emptyset$ e $A \perp\!\!\!\perp \Omega$, $\forall A \subset \Omega$.
- Se $A, B \subset \Omega$ são t.q. $P(A), P(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$ (mutuam/ exclusivos) então A e B não são indep ($A \not\!\perp\!\!\!\perp B$).
- Se $A, B \subset \Omega$ são t.q. $P(A), P(B) > 0$ e $A \perp\!\!\!\perp B$, então $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.
- Se $A, B \subset \Omega$ são t.q. $A \perp\!\!\!\perp B$, então $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$ e $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

Def.: $A, B, C \subset \Omega$ dizem-se mutuamente ou completamente independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ e $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Nota: esta noção generaliza-se de forma natural para número $n \geq 2$ de acontecimentos $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$.

• **Def.**: Dois acontecimentos $A, B \subset \Omega$ são independentes condicionalmente a um acontecimento $C \subset \Omega$ com $P(C) > 0$, $((A \perp\!\!\!\perp B) \mid C)$, se $\boxed{P((A \cap B) \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)}$

Nota: $A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow (A \perp\!\!\!\perp B) \mid C$ mas $\cancel{\Leftarrow}$

• **Exemplo**: Numa fábrica existem 3 máquinas (A, B e C) que produzem chips: A produz 25%, B produz 35% e C produz 40% dos chips. A % de chips defeituosos produzidos por cada máquina é a seguinte: A - 5%, B - 4% e C - 2%.
Os acontecimentos "ser produzido por A" e "ser defeituoso" são independentes?

$$P(A) \cdot P(D) = P(A \cap D) = P(D \mid A) \cdot P(A) \ ?$$

$$P(D) = P(D \mid A) = 0{,}05 \ ?$$

$$P(D) = P(D|A)\cdot P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C)$$
$$= 0{,}05 \times 0{,}25 + 0{,}04 \times 0{,}35 + 0{,}02 \times 0{,}4$$
$$= 0{,}05 \times 0{,}25 + (0{,}05 - 0{,}01)\times 0{,}35 + (0{,}05 - 0{,}03)\times 0{,}4$$
$$= 0{,}05 - 0{,}01 \times 0{,}35 - 0{,}03 \times 0{,}4 \neq 0{,}05$$

$\Rightarrow$ A e D não são independentes.

• Exercício 2.4: A taxa de prevalência de um det. cancro é 0,005, i.e. 0,5% da pop. tem esse cancro. Um teste de diagnóstico para esse cancro é tal que:

(i) $P(T^+ | C) = 0{,}99$ (sensibilidade do teste)

(ii) $P(T^- | \bar{C}) = 0{,}95$ (especificidade do teste)

(a) Calcule o valor preditivo do teste, i.e. $P(C|T^+)$.

$$P(C|T^+)\cdot P(T^+) = P(T^+|C)\cdot P(C) \quad (= P(T^+ \cap C))$$

$$\Rightarrow P(C|T^+) = \frac{P(T^+|C)\cdot P(C)}{P(T^+)} =$$

$$= \frac{P(T^+|C)\cdot P(C)}{P(T^+|C)P(C) + P(T^+|\bar{C})P(\bar{C})} =$$

$$= \frac{0{,}99 \times 0{,}005}{0{,}99 \times 0{,}005 + (1-0{,}95)\times 0{,}995} = \frac{\frac{99}{100} \times \frac{5}{1000}}{\frac{99}{100} \times \frac{5}{1000} + \frac{5}{100} \times \frac{995}{1000}}$$

$$= \frac{99 \times 5}{99 \times 5 + 5 \times 995} = \frac{495}{495 + \frac{9950}{2}} = \frac{990}{990 + 9950} = \frac{99}{1094}$$

$$\simeq 0{,}0905 = 9{,}05\% \;//$$

(b) Suponha agora que o teste foi aplicado duas vezes seguidas à mesma pessoa com resultado positivo em ambas. Assumindo que, dado o estado do indivíduo, os resultados do teste em sucessivas aplicações, em qq indivíduo, são independentes, qual é a probabilidade desta pessoa ter cancro? O que pode concluir quanto ao valor preditivo da aplicação do teste duas vezes seguidas?

$$P(C \mid T_1^+ \cap T_2^+) = \frac{P(T_1^+ \cap T_2^+ \mid C) \cdot P(C)}{P(T_1^+ \cap T_2^+)} =$$

$$= \frac{P(T_1^+ \mid C) \cdot P(T_2^+ \mid C) \cdot P(C)}{P(T_1^+ \mid C) \cdot P(T_2^+ \mid C) \cdot P(C) + P(T_1^+ \mid \overline{C}) P_2(T_2^+ \mid \overline{C}) \cdot P(\overline{C})}$$

$$= \frac{(99/100)^2 \times \frac{5}{1000}}{(99/100)^2 \times \frac{5}{1000} + \left(\frac{5}{100}\right)^2 \times \frac{995}{1000}} = \frac{99^2 \times 5}{99^2 \times 5 + 25 \times 995}$$

$$= \frac{49005}{49005 + 24875} = \frac{49005}{73880} \simeq 0{,}6633 = \underline{\underline{66{,}33\%}},$$

i.e. o valor preditivo aumenta mais de 7 vezes. //

- Pergunta 1 do 1º Teste de PE, 15/05/2021, 9h00.

Uma eng. inf. faz sequencialm/ 3 operações de manutenção de um servidor:

- Op. A é feita em 1º lugar em 70% das manutenções
- Destas, a op. B é feita em 2º lugar em 43% das vezes.
- Destas, a op. C é feita em 3º lugar em 31% das vezes.

Numa manutenção ao acaso, qual é a prob. de a enj. ter feito A em 1º lugar, B em 2º lugar e não ter feito C em 3º lugar.

A = op. A em 1º lugar $\qquad P(A) = 70/100$

B = op. B em 2º lugar $\qquad P(B|A) = 43/100$

C = op. C em 3º lugar $\qquad P(C|A\cap B) = 31/100$

Pela lei das probabilidades compostas temos

$$P(A\cap B\cap \bar{C}) = P(A) \times P(B|A) \times P(\bar{C}|A\cap B)$$

$$= \frac{70}{100} \times \frac{43}{100} \times \left(1 - \frac{31}{100}\right) \simeq 0{,}20769$$

- Pergunta 1 do 2º Exame de PE, 24/02/2022, 10h30.

Implantação de ciclovias numa cidade:

→ 1/2 dos residentes estão satisfeitos $[P(S) = 1/2]$

→ 1/6 " " " parcialmente satisfeitos $[P(PS) = 1/6]$

→ outros residentes estão insatisfeitos $[P(I) = 1/2 - 1/6]$

→ dos satisfeitos, 70% são ciclistas $[P(C|S) = 0{,}7]$

→ dos parc. sat., 20% são ciclistas $[P(C|PS) = 0{,}2]$

→ dos insatisfeitos, 10% são ciclistas $[P(C|I) = 0{,}1]$

Calcule a prob. de um residente, selecionado ao acaso e que tenha declarado não ser ciclista, estar insatisfeito com a implantação de ciclovias, i.e. $P(I|\bar{C}) = ?$

$$P(I|\bar{C}) \cdot P(\bar{C}) = P(\bar{C}|I) \cdot P(I)$$

$$\Rightarrow P(I|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C}|I) \cdot P(I)}{P(\bar{C})} =$$

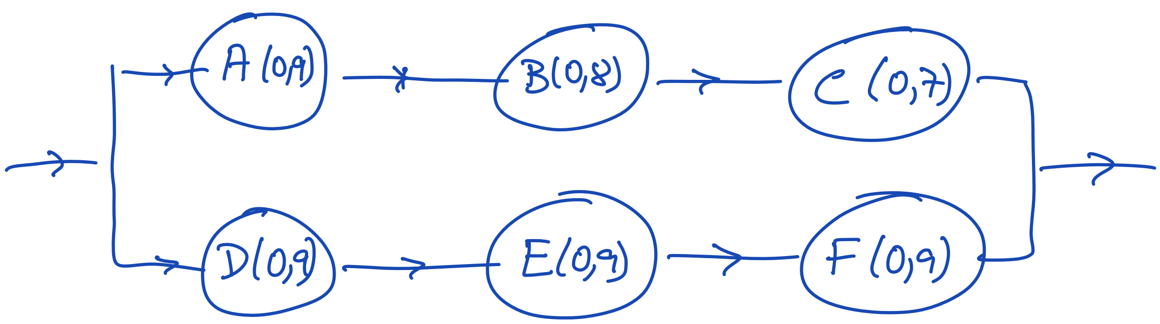
$$= \frac{P(\bar{C}|I) \cdot P(I)}{P(\bar{C}|S) \cdot P(S) + P(\bar{C}|PS)\, P(PS) + P(\bar{C}|I) \cdot P(I)}$$

$$= \frac{(1-0{,}1) \times 1/3}{(1-0{,}7) \cdot 1/2 + (1-0{,}2)\, 1/6 + (1-0{,}1)\, 1/3}$$

$$= \frac{9/10 \times 1/3}{\frac{3}{10} \times 1/2 + \frac{8}{10} \times 1/6 + \frac{9}{10} \times 1/3} = \frac{9}{4{,}5 + 4 + 9} =$$

$$= 9/17{,}5 \simeq 0{,}5143 \,//$$

- Pergunta 1 do 1º Exame de PE, 12/02/2022, 10h30



A, B, C, D, E, F funcionam de forma mutuam/ independte.
Qual é a probabilidade de o circuito funcionar?

$$P(\text{"funcionar"}) = P[(A \cap B \cap C) \cup (D \cap E \cap F)] =$$

$$= P(A \cap B \cap C) + P(D \cap E \cap F) - P(A \cap B \cap C \cap D \cap E \cap F)$$

$$\underset{\text{indep.}}{=} P(A)\,P(B)\,P(C) + P(D)P(E)P(F) - P(A)P(B)P(C)\,P(D)\,P(E)P(F)$$

$$= 0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}7 + (0{,}9)^3 - (0{,}9)^4 \times 0{,}8 \times 0{,}7$$

$$= 0{,}504 + 0{,}729 - 0{,}504 \times 0{,}729 = 0{,}865584 \,//$$