2.2 Noção de probabilidade (cont.)

- **Última aula**: definição axiomática de probabilidade.

Ω = espaço de resultados

$\mathcal{A}$ = σ-álgebra de subconjuntos de Ω (acontecimentos)

[$\Omega \in \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}$ é fechado p/ complementação e uniões numeráveis]

$P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ é uma medida de probabilidade se:

A1 $\quad P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2 $\quad P(\Omega) = 1$

A3 $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad \forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$: $A_i \cap A_j = \phi, \forall i \neq j$

(Prop. aditiva para uniões numeráveis de acontecimentos mutuamente exclusivos.)

- **Consequências da definição axiomática**

0. $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{A}$. [última aula]

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. [$\Omega = A \cup \bar{A} \xRightarrow[A3]{A2} 1 = P(A) + P(\bar{A})$.]

2. $P(\phi) = 0$. [$\phi = \bar{\Omega} \overset{①}{\Rightarrow} P(\phi) = 1 - P(\Omega) \overset{A2}{=} 0$]

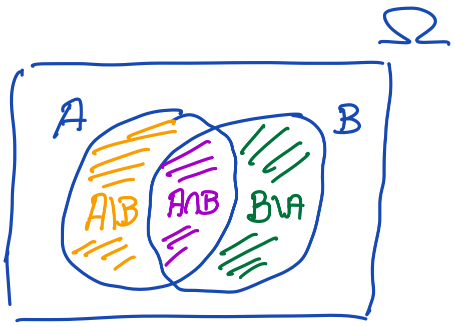
3. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$. [$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ e $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \phi$]

4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$. [$A \subset B \Rightarrow B = (B \setminus A) \cup A$ e $P(B \setminus A) \overset{A1}{\geq} 0$]

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

[$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$

$\overset{③}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$]



(5)* $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap)$
$+ P(A \cap B \cap C)$.

Exercício: formule e prove por indução o correspondente resultado geral para $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

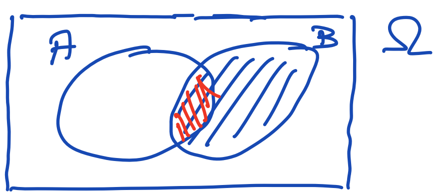
- Exemplo: numa determinada população 9,8% das pessoas compram a revista A, 22,9% a revista B e 5,1% ambas as revistas. Calcule a probabilidade de uma pessoa dessa população
  a) comprar pelo menos uma das revistas.
  b) comprar só a revista A.
  c) não comprar qualquer revista.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}098 + 0{,}229 - 0{,}051$
$= 0{,}276$

b) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}098 - 0{,}051 = 0{,}047$

c) $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}276 = 0{,}724$.

2.3 Probabilidade Condicionada



Def.: A probabilidade condicionada de A sabendo que ocorreu B, com $P(B) > 0$, é dada por

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Nota: dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e um acontecimento $D \in \mathcal{A}$ com $P(D) > 0$, a probabilidade condicionada $P_D : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $P_D(A) = P(A|D)$, é uma nova medida de probabilidade, i.e. satisfaz A1, A2, A3, 1 - 5, etc.

- **Proposição** [Lei das probabilidades compostas]

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $A, B \in \mathcal{A}$, $P(A), P(B) > 0$

Então
$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)\, P(A|B) = P(A)\, P(B|A)}$$

Mais geralmente, dados $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tais que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$, temos que

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right)}$$

Dem.: indução.

Q.E.D.

- **Exemplos**

1. Os alunos do 2º ano da LEEC fizeram 100 programas. Verificou-se que:
   - 20 % tinham erros de Sintaxe (S).
   - 30 % tinham erros de Acesso à Memória (AM)
   - 10 % tinham erros S e AM.

   Dado um programa ao acaso com erros de sintaxe, qual é a probabilidade de ter também erros de acesso à memória?

$$P(AM \mid S) = \frac{P(AM \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = 0{,}5$$

(2) Um sistema de comunicação binária transmite 0's e 1's com probabilidade 0,5 cada. Devido ao "ruído":

- um 1 pode ser recebido como 0 com prob. 0,1.
- um 0 pode ser recebido como 1 com prob. 0,05.

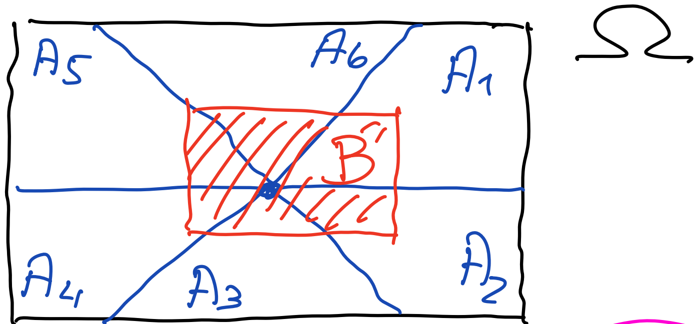
Qual é a prob. de ser transmitido um 1 e ser recebido um zero?

$$P(T1 \cap R0) = P(T1) \cdot P(R0 \mid T1)$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}05$$

2.4 Lei de probabilidade total e Teorema de Bayes

Def.: Os subconjuntos não-vazios $A_1, A_2, \ldots, A_m \subset \Omega$ formam uma partição de Ω se $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$ e $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i \neq j$.

(i.e. são exaustivos e mutuamente exclusivos)



$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{m} P(B \mid A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema da probabilidade total

Se $A_1, A_2, \dots, A_m \subset \Omega$ formam uma partição de Ω e $P(A_i) > 0, \forall i$, então

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

para qualquer $B \subset \Omega$.

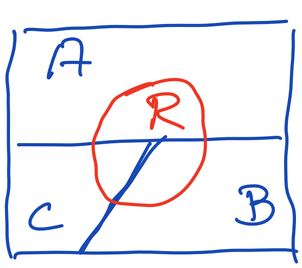
Teorema de Bayes:

$A_1, \dots, A_m \subset \Omega$, partição de Ω com $P(A_i) > 0, \forall i$. Então, para qualquer $B \subset \Omega$ com $P(B) > 0$ e qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$, tem-se

$$\boxed{P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)} = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(B|A_i)P(A_i)}}.$$

Exemplo: Uma cadeia de lojas vende 3 marcas de telemóveis. 50% das vendas de telemóveis são da marca A, 30% da marca B e 20% da marca C. Qualquer das marcas oferece garantia de 2 anos e 25% dos tlms A, 20% dos B e 10% dos C, requerem reparação dentro da garantia.

(a) Qual a prob. de um cliente que compra um tlm precisar de o reparar dentro da garantia.



$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) + P(R|C)P(C)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{8} + \frac{4}{50} =$$

$$= \frac{25+16}{200} = \frac{41}{200} = \frac{20{,}5}{100} = \underline{\underline{0{,}205}}$$

b) Qual a prob. de um cliente que requer reparação não ter comprado um telemóvel da marca A?

$$P(\bar{A} \mid R) = 1 - P(A \mid R) = 1 - \frac{P(R \mid A) \times P(A)}{P(R)}$$

$$= 1 - \frac{1/4 \times 1/2}{\frac{41}{200}} = 1 - \frac{200}{8 \times 41} = 1 - \frac{25}{41} = \frac{16}{41} \simeq 0,390244$$

• Exercício 2.3: Um geólogo crê que existe petróleo numa certa região com probabilidade 0,8 e que, caso haja petróleo, a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração é de 0,5.

(a) Qual a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração?

$$P(P_1) = P(P_1 \mid P)\, P(P) + \underbrace{P(P_1 \mid \bar{P})}_{=0} \cdot P(\bar{P})$$

$$= 0,5 \times 0,8 = 0,4$$

(b) Não tendo saído petróleo na primeira perfuração, qual é a nova prob. de existência de petróleo na região?

$$P(P \mid \bar{P}_1) = \frac{P(\bar{P}_1 \mid P)\, P(P)}{P(\bar{P}_1)} =$$

$$= \frac{(1 - P(P_1 \mid P))\,(P(P))}{1 - P(P_1)} = \frac{(1-0,5)\,(0,8)}{1-0,4} = \frac{0,4}{0,6}$$

$$= 2/3$$