• **Cap. 2** Noções básicas de probabilidade

2.1 Experiências aleatórias. Espaço de resultados. Acontecimentos.

Def.: Uma experiência diz-se aleatória (EA) se:

(i) conhecemos apriori todos os seus possíveis resultados;
(ii) não é possível conhecer apriori o seu resultado;
(iii) é possível ser repetida nas mesmas condições.

Exemplos:

- Jogos de azar: moeda ao ar (EA1), lançamento de dado (EA2), escolha de carta num baralho.
- Duração de chamada telefónica EA3
- Característica "defeituosa" ou "não defeituosa" de peças produzidas em série. EA4

Def.: O espaço de resultados ou espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representa-se geralmente por Ω ou S.

Classificação de Ω:

- Discreto: Ω finito ou numerável (e.g. $\mathbb{N}$)
- Contínuo: Ω não numerável (e.g. $\mathbb{R}$).

Exemplos: $EA_1 \to \Omega_1 = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$, discreto

$EA_2 \to \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, discreto

$EA_3 \to \Omega_3 = [0, +\infty[$, contínuo

Def.: Um <u>evento</u> ou <u>acontecimento</u> é um subconjunto de Ω.

Diz-se que um evento $A \subset \Omega$ <u>ocorreu</u> numa EA se o resultado da EA pertence a A.

Exemplos:

- EA 1: $A_1 = \{\text{cara}\}$

  EA 2: $A_2 = \{1, 2\}$

  EA 3: $A_3 = [0, 30[$

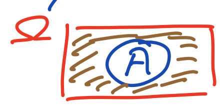
- EA, Ω: $A = \Omega$ acontecimento <u>certo</u>

  $A = \emptyset$ acontecimento <u>impossível</u>

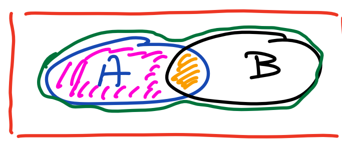
  $A = \{\omega\}, \omega \in \Omega$: acontecimento <u>elementar</u>.

<u>Operações com acontecimentos</u> ($\Leftrightarrow$ operações com conj.tos)

- complementação: $\bar{A} = \Omega \setminus A$



- união e intersecção: $A \cup B$ e $A \cap B$
- diferença: $A \setminus B$.



$\rightsquigarrow$ rever propriedades destas operações (e.g. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, ...)

Def. Dois eventos $A, B \subset \Omega$ dizem-se <u>mutuam/ exclusivos</u> ou <u>disjuntos</u> se não puderem ocorrer simultaneam/, i.e. se $A \cap B = \emptyset$.

2.2 Noção de probabilidade.

- Probabilidade é uma quantificação da "possibilidade" de ocorrência de cada acontecimento:

$$A \subset \Omega \rightsquigarrow P(A) \in [0,1].$$

- "Definição" clássica ou de Laplace

$$\boxed{\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}, \quad P(\{\omega_i\}) = 1/N, \ \forall i \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{\# A}{N}, \ \forall A \subset \Omega}$$

$$= \frac{\# \text{ casos favoráveis a } A}{\# \text{ casos possíveis}}$$

Nota: rever cálculo combinatório.

Limitações: só é aplicável quando

→ $\# \Omega$ é finito.

→ todos os el[tos] de Ω são equiprováveis.

- "Definição" frequencista de probabilidade

Def.: Dada uma experiência aleatória que se realizou n vezes e um acontecimento $A \subset \Omega$, a frequência relativa de A é definida por

$$f_n(A) = \frac{n(A)}{n},$$

com $n(A) = \#$ de observações de A

$= $ frequência absoluta de A

A probabilidade de A é então "definida" por

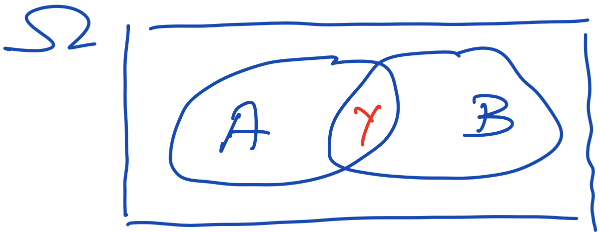
$$\boxed{P(A) = \text{"}\lim_{n \to +\infty} f_n(A)\text{"}}$$

<u>Limitação</u>: só é aplicável quando é possível repetir a experiência aleatória um número muito elevado de vezes exatamente nas mesmas condições.

- Exemplo com distribuição binomial em R.

- <u>Exercício 2.1</u>

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $P(A)+P(B)=x$ e $P(A\cap B)=y$.



$$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = x-y$$

<u>Nota</u>: a informação dada não determina $P(A)$ nem $P(B)$ individualmente.

Determine, em função de x e de y, a probabilidade de:

(a) Não se realizar nenhum dos 2 acontecimentos

$$P(\overline{A\cup B}) = 1-(x-y)$$

(b) se realizar um e um só dos 2 acontecimentos:

$$P(A\cup B)-P(A\cap B) = (x-y)-y = x-2y$$

(c) Se realizar pelo menos um dos 2 acontecimentos:

$$P(A\cup B) = x-y$$

(d) Se realizar quanto muito um único acontecimentos:

$$(a)+(b) = 1-(x-y)+x-2y = 1-y = 1-P(A\cap B).$$

- "Definição" subjetivista ou subjectiva

De forma corrente, "alguém" atribui a cada acontecimento um número em [0, 1], a que chama "probabilidade do acontecimento", de acordo com o grau de credibilidade que lhe associa.

Coerência $\Leftrightarrow$ verificação de um conj.[to] de axiomas.

- Definição Axiomática (Kolmogorov, 1933)

Ω = espaço de resultados

$\mathcal{A}$ = conjunto dos acontecimentos definidos em Ω

(i.e. ele.[tos] de $\mathcal{A}$ são subconjuntos de Ω)

Uma função $P: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$A \longmapsto P(A)$$
($A \in \mathcal{A}$, $P(A) \in \mathbb{R}$)

diz-se uma medida de probabilidade se satisfizer os seguintes Axiomas:

A1 $\quad P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2 $\quad P(\Omega) = 1$

A3 $\quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad \forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}:$

$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

(Prop. aditiva para uniões numeráveis de acontecimentos mutuamente exclusivos.)

Nota 1: $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + \underbrace{P(\bar{A})}_{\geq 0} \geq P(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \quad P(A) \in [0, 1], \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

Nota 2: está implícito na def. anterior que o conjunto $\mathcal{A}$ de acontecimentos tem as seguintes propriedades:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

3) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \in \mathcal{A}$,

i.e. $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Exemplos:

a) $\mathcal{A} = \{ \phi, \Omega \}$

b) $\mathcal{A} = \mathbb{P}(\Omega) \equiv$ todos os subconjuntos de Ω

c) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma$-álgebra de Borel
= "menor" σ-álgebra que contém todos os intervalos de $\mathbb{R}$. Nota: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq \mathbb{P}(\mathbb{R})$!