Resolução do 1.º Exame do 1.º semestre de 2021/22

④ X (resp. Y) = # de fornos c/ defeitos graves (resp. ligeiros) numa amostra aleatória de 2 fornos.
Função de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y):

X \ Y	0	1	2
0	0.49	0.28	0.04
1	0.14	0.04	0
2	0.01	0	0

Calcule o valor esperado e a variância do nº total de fornos sem quaisquer defeitos numa amostra aleatória de 2 fornos.

· Z = nº total de fornos sem defeitos
$= 2 - X - Y$

· $E(Z) = E(2-X-Y) = 2 - E(X) - E(Y)$

$V(Z) = V((-1)(X+Y)) = (-1)^2\, V(X+Y) =$

$= V(X) + V(Y) + 2\times \text{cov}(X+Y)$

$= (E(X^2) - E(X)^2) + (E(Y^2) - E(Y)^2) +$

$+ 2\,(E(XY) - E(X)\cdot E(Y))$

·

X \ Y	0	1	2	$P(X=x)$
0	0.49	0.28	0.04	0.81
1	0.14	0.04	0	0.18
2	0.01	0	0	0.01
$P(Y=y)$	0.64	0.32	0.04	1

$$E(X) = \sum_{x=0}^{2} x P(X=x) = 0 \times 0.81 + 1 \times 0.18 + 2 \times 0.01 = 0.2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 P(X=x) = 0 \times 0.81 + 1 \times 0.18 + 4 \times 0.01 = 0.22$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.22 - 0.04 = 0.18$$

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{2} y P(Y=y) = 0 \times 0.64 + 1 \times 0.32 + 2 \times 0.04 = 0.4$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=0}^{2} y^2 P(Y=y) = 0 \times 0.64 + 1 \times 0.32 + 4 \times 0.004 = 0.48$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 0.48 - 0.16 = 0.32$$

$$E(XY) = \sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{2} xy \, P(X=x, Y=y) = 1 \times 1 \times 0.04 = 0.04$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.04 - 0.2 \times 0.4$$
$$= -0.04$$

- $E(Z) = 2 - E(X) - E(Y) = 2 - 0.2 - 0.4 = 1.4$ //

$$V(Z) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

$$= 0.18 + 0.32 + 2(-0.04) = 0.5 - 0.08 = \underline{\underline{0.42}}$$

5) X = # acessos por minuto a um website

$X \sim$ Poisson $(\lambda = 9)$ $\quad (\Rightarrow E(X) = Var(X) = 9)$

Numa a.a. de 60 i.i.d., qual é a prob. aprox. de o nº médio de acessos por minuto ser superior a $E(X)$ e não exceder o 3º quartil de X?

- $X_i \overset{i.i.d.}{\sim}$ Poisson $(\lambda = 9)$, $i = 1, \ldots, n = 60$

  $E(X_i) = 9$, $V(X_i) = 9$

- 3º quartil : $F_X^{-1}(0.75) = ?$

  Tabela $\Rightarrow$ $F_X(10) = 0.7060$ e $F_X(11) = 0.8030$

  $\Rightarrow$ 3º quartil $= 11$

- $\overline{X} = \sum_{i=1}^{60} X_i / 60 \Rightarrow E(\overline{X}) = \dfrac{60\, E(X)}{60} = E(X) = 9$

  $V(\overline{X}) = \dfrac{60\, V(X)}{60^2} = \dfrac{V(X)}{60} = \dfrac{9}{60} = 0.15$

- TLC $\Rightarrow$ $\dfrac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{V(\overline{X})}} = \dfrac{\overline{X} - 9}{\sqrt{0.15}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

$\Rightarrow P(9 < \overline{X} \leq 11) = P(\overline{X} \leq 11) - P(\overline{X} \leq 9)$

$= P\left(\dfrac{\overline{X}-9}{\sqrt{0.15}} \leq \dfrac{11-9}{\sqrt{0.15}}\right) - P\left(\dfrac{\overline{X}-9}{\sqrt{0.15}} \leq 0\right)$

$\simeq \Phi\left(\dfrac{2}{\sqrt{0.15}}\right) - \Phi(0) \simeq \Phi(5.16) - 0.5$

$\simeq 1 - 0.5 = 0.5$ //

tabela

⑥

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{19!}{(19-x)!} \times \dfrac{(18+\beta-x)!}{(19+\beta)!} \times \beta, & x = 0, 1, \ldots, 19 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

$\beta \in \{2, 6\}$

$n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$

Obtenha a estimativa de máxima verosimilhança de $E(X) = 19/_{\beta+1}$.

- $P(X=0) = \beta/_{19+\beta}$, $P(X=1) = \dfrac{19 \times \beta}{(19+\beta)\times(18+\beta)}$

- $L(\beta \mid \underline{x}) \underset{x_i \text{ indep}}{=} P(X=x_1)\, P(X=x_2)\, P(X=x_3)$

$$= \beta/_{19+\beta} \times \beta/_{19+\beta} \times \frac{19\beta}{(19+\beta)(18+\beta)} = \frac{19\beta^3}{(19+\beta)^3(18+\beta)}$$

- $\left.\begin{array}{l} \beta = 2 \Rightarrow L(\beta \mid \underline{x}) = \dfrac{19 \times 2^3}{21^3 \times 20} \simeq 0.000821 \\ \beta = 6 \Rightarrow L(\beta \mid \underline{x}) = \dfrac{19 \times 6^3}{25^3 \times 24} = 0.010944 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\beta} = 6$

$$\Rightarrow \widehat{h(\beta)} = h(\hat{\beta}) = \frac{19}{\hat{\beta}+1} = \frac{19}{7} \simeq 2.714286$$

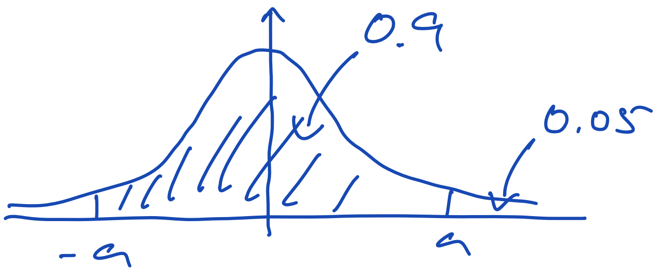
(7) $X = \begin{cases} 1 , & \text{pessoa selecionada compra o novo modelo de telemóvel} \\ 0 , & \text{c.c.} \end{cases}$

$X \sim Ber(p)$, p desconhecido

$n = 500$ dos quais 323 vão comprar o novo modelo de telemóvel

$IC_{90\%}(p) = ?$

• V.a. fulcral: $Z = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$



$\Rightarrow a = \Phi^{-1}(0.95) \overset{\text{tabela}}{\downarrow}{\doteq} 1.6449$

• $-a \le Z \le a \iff -a \le \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \le a$

$\iff \overline{X} - a\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \le p \le \overline{X} + a\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}$

• $\overline{X} = 323/500 = 0.646 \Rightarrow \dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} = \dfrac{\frac{323}{500} \times \frac{177}{500}}{500}$

$\Rightarrow \sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{500}} = \dfrac{1}{500} \times \sqrt{\dfrac{323 \times 177}{500}} = 0.0214$

$\Rightarrow a\sqrt{\dfrac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} = 1.6449 \times 0.0214 = 0.0352$

$\Rightarrow IC_{90\%}(p) = [0.646 - 0.0352, \ 0.646 + 0.0352]$

$= [0.6108, \ 0.6812]$ //

(8)

X = comprimento (cm) de qq um dos 2 pedaços

v.a. c/ dist. normal, $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$ desconhecidos

$n = 61$, $\bar{x} = 25.5$, $s^2 = 3.2$.

Os dados apoiam a conjectura $E(X) = 25$?

Decidir com base no valor-p aproximado.

- Hipóteses: $H_0 : \mu = \mu_0 = 25$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0 = 25$

- Estatística de teste: $T_{H_0} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \underset{H_0}{\sim} t_{(n-1)}$

- Valor observado: $t_{obs} = \dfrac{25.5 - 25}{\sqrt{3.2}/\sqrt{61}} \simeq 2.18$

- Valor-p $\simeq 2\,P(T_{H_0} > |t_{obs}|) \simeq 2(1 - F_{t_{60}}(2.18))$

tabela $\Rightarrow 0.975 < F_{t_{60}}(2.18) < 0.99$

$\Rightarrow 2(1-0.99) < 2(1-F_{t_{60}}(2.8)) < 2(1-0.975)$

$\Rightarrow 0.02 <$ valor-p < 0.05

$\Rightarrow$ • rejeitar Ho para níveis de significância $\alpha = 5\%$ ou maior

• não há evidência para rejeitar Ho para para níveis de significância $\alpha = 2\%$ ou menor.

9. $n = 230$: 58 tipo 1, 25 tipo 2, 21 tipo 3, 126 tipo 4

- $p_1 = 2p_2 = 3p_3 = \frac{1}{2}p_4$
- Consistente c/ resultados a $\alpha = 5\%$?

- Formulário: $T_{H_0} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \overset{a}{\underset{H_0}{\sim}} \chi^2_{(k-1)}$ $(k=4)$

$$RC_\alpha \simeq [c = F^{-1}_{\chi^2_{(k-1)}}(1-\alpha), +\infty[$$

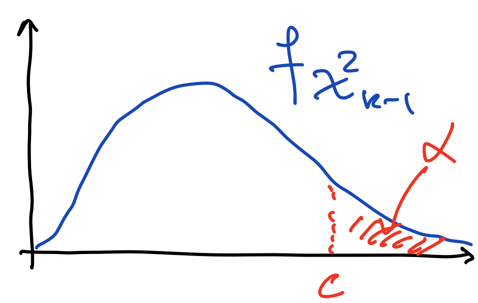


tabela $= [F^{-1}_{\chi^2_3}(0.95), +\infty[$

$= [7.815, +\infty[$

• $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = p_1 + \frac{p_1}{2} + \frac{p_1}{3} + 2p_1 =$

$= (3 + 5/6)\, p_1 = \frac{23}{6} p_1 \Rightarrow \boxed{p_1 = \frac{6}{23}}$

$H_0: \boxed{p_2 = \frac{3}{23}}, \boxed{p_3 = \frac{2}{23}}, \boxed{p_4 = \frac{12}{23}}$

vs $H_1: p_i \neq p_i^0$ p/ algum $i = 1, \dots, 4$.

• $E_1 = \frac{230 \times 6}{23} = 60$; $E_2 = 30$; $E_3 = 20$; $E_4 = 120$

• Observación: $O_1 = 58$; $O_2 = 25$; $O_3 = 21$; $O_4 = 126$

• Valor observado da estatística de teste:

$$t_{obs} = \frac{(58-60)^2}{60} + \frac{(25-30)^2}{30} + \frac{(21-20)^2}{20} + \frac{(126-120)^2}{120} =$$

$$= \frac{4}{60} + \frac{25}{30} + \frac{1}{20} + \frac{36}{120} = \frac{4+50+3+18}{60} =$$

$$= \frac{75}{60} = \frac{5}{4} = \underline{\underline{1.25}}$$

• $t_{obs} = 1.25 \notin RC_{0.05} \approx [7.815, +\infty[$

$\Rightarrow$ não há evidência para rejeitar H_0 ao nível de significância de 5% //