Cap. 8 Testes de Hipóteses (cont.)

8.3 Teste para a variância de uma normal (valor médio desconhecido)

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 >, <, \neq \sigma_0^2$

Nível de significância: $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verd})$

Estatística do Teste: $Q_{H_0} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$

Região Crítica ou de Rejeição $(q_{obs} \in RC_\alpha \Rightarrow \text{rejeitar } H_0)$

- $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \{q \in \mathbb{R}^+ : q < a \vee q > b\}$

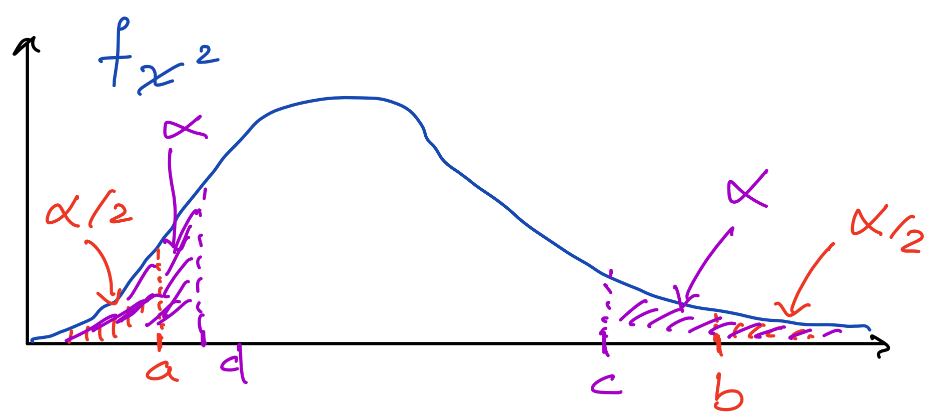
  com $a = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha/2)$ e $b = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1 - \frac{\alpha}{2})$

- $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \{q \in \mathbb{R}^+ : q > c\}$

  com $c = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1 - \alpha)$

- $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \Rightarrow RC_\alpha = \{q \in \mathbb{R}^+ : q < d\}$

  com $d = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)$



Exemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $n = 5$, $s^2 = 0.603$

$H_0: \sigma^2 = (0.7)^2 = 0.49 \quad \text{v.s} \quad H_1: \sigma^2 \neq 0.49$

$\alpha = 0.05 \quad , \quad Q_{H_0} = \dfrac{4S^2}{0.49} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} \chi^2_4$

$a = F^{-1}_{\chi_4}(0.025) \overset{\text{tabela}}{=} 0.484 \quad e \quad b = F^{-1}_{\chi_4}(0.975) \overset{\text{tabela}}{=} 11.143$

$\Rightarrow RC_{0.05} = [0, 0.484] \cup [11.143, +\infty[$

$q_{obs} = \dfrac{4 \times 0.603}{0.49} = 4.922 \notin RC_{0.05}$

$\Rightarrow$ não há evidência para rejeitar H_0 ao nível de significância de 5%

8.4 Teste para uma probabilidade de sucesso

$H_0: p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1: p >, <, \neq p_0$

$Z_{H_0} = \dfrac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\overset{a}{\sim}} N(0,1) \quad (\text{via TLC})$

RC_α:

- $H_1: p \neq p_0 \Rightarrow RC_\alpha \approx \{ z \in \mathbb{R} : z < -c \vee z > c \}$
  com $c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $H_1: p > p_0 \Rightarrow RC_\alpha \approx \{ z \in \mathbb{R} : z > c \}$ c/ $c = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- $H_1: p < p_0 \Rightarrow RC_\alpha \approx \{ z \in \mathbb{R} : z < c \}$ c/ $c = \Phi^{-1}(\alpha)$

Exemplo Sondagem a 1200 eleitores revelou que 683 tencionam votar no partido M.

O presidente do M tinha dito "estou convencido que vamos obter mais de 50% dos votos". Fixando $\alpha = 0.01$ e em face dos resultados da sondagem, será que o que disse o presidente do M é razoável ou não?

$H_0 : p = 0.5$ vs $H_1 : p > 0.5$

(rejeição de H_0 é a conclusão "forte" e que corrobora o que disse o pres. do M)

$$Z_{H_0} = \frac{\overline{X} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{1200}}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \quad \text{sob } H_0$$

$$RC_{0.01} = [\underbrace{\Phi^{-1}(1-\alpha)}_{\Phi^{-1}(0.99)}, +\infty[\overset{\text{tabela}}{=} [2.326, +\infty[$$

$$z_{obs} = \frac{683/1200 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{1200}}} = 4.79 \in RC_{0.01}$$

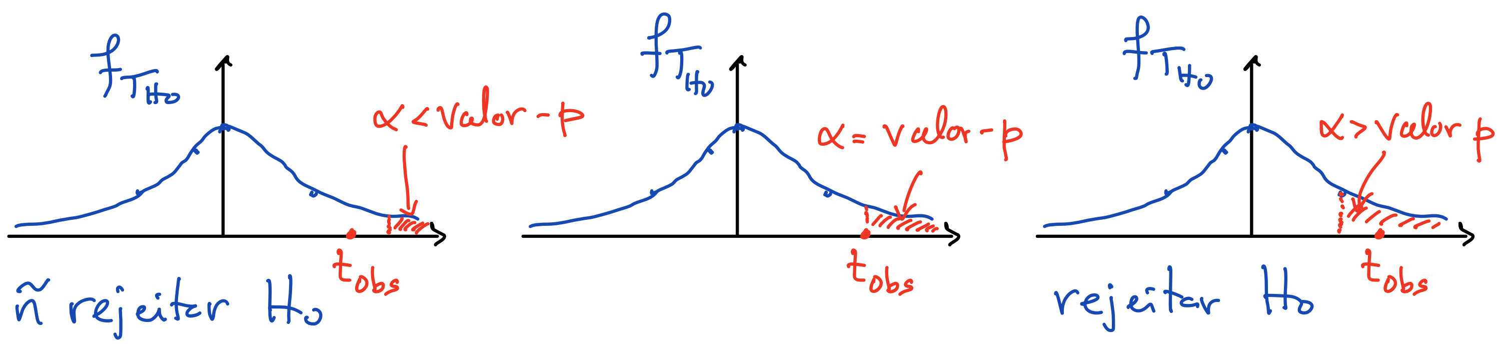
$\Rightarrow$ há evidência para rejeitar H_0 ao nível de significância de 1%, i.e. a sondagem corrobora o presidente do M.

8.5 Relação entre intervalos de confiança e testes de hipóteses - apenas testes bilaterais e quando a v.a. fulcral e a estatística de teste são da mesma forma

Para uma mesma amostra, o intervalo de confiança $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\theta) = [t_1, t_2]$ fornece um intervalo de não rejeição de $H_0: \theta = \theta_0$, i.e. $\theta_0 \in [t_1, t_2] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ não rejeitar H_0, $\theta_0 \notin [t_1, t_2] \Rightarrow$ rejeitar H_0.

8.6 Método do valor-p

Ideia: dado o valor observado t_{obs} da estatística de teste, determinar o nível de significância para o qual t_{obs} = valor crítico. Por exemplo, para um teste unilateral à direita com estatística de teste com distrib. normal, temos:



Def.: valor-p = menor nível de significância que leva à rejeição de H_0.

Teste unilateral à direita: valor-p $= P(T_{H_0} > t_{obs})$

Teste unilateral à esquerda: valor-p $= P(T_{H_0} < t_{obs})$

Teste bilateral: valor-p $= 2 \min\{P(T_{H_0} < t_{obs}), P(T_{H_0} > t_{obs})\}$

Nota: quando $T_{H_0} \sim$ t-student ou qui-quadrado as tabelas só permitem obter um intervalo que contém o valor-p.

Decisão com base no valor-p:

→ Rejeitar H_0 para $\alpha \geq$ valor-p

→ Não rejeitar H_0 para $\alpha <$ valor-p

• Sumário: 3 métodos de decisão em testes de hipóteses paramétricos a nível de significância α:

(1) Com base na região crítica RC_α

$t_{obs} \in RC_\alpha \Rightarrow$ rejeitar H_0

$t_{obs} \notin RC_\alpha \Rightarrow$ não rejeitar H_0

(2) Com base no intervalo de confiança $IC_{(1-\alpha)}$ (apenas testes bilaterais com estatística de teste análoga à v.a. fulcral) $H_0: \theta = \theta_0$

$\theta_0 \notin IC_{1-\alpha}(\theta) \Rightarrow$ rejeitar H_0

$\theta_0 \in IC_{1-\alpha}(\theta) \Rightarrow$ não rejeitar H_0

(3) Com base no valor-p

$\alpha \geq$ valor-p $\Rightarrow$ rejeitar H_0

$\alpha <$ valor-p $\Rightarrow$ não rejeitar H_0

Exemplo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 1$, $n = 25$, $\bar{x} = 8.5$

$H_0: \mu = 8$ vs $H_1: \mu \neq 8$, com $\alpha = 0.05$

$$Z_{H_0} = \frac{\bar{X} - 8}{1/5} = 5(\bar{X} - 8) \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

$\Rightarrow \quad z_{obs} = 5(8.5-8) = 2.5$

① $c = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$

$\Rightarrow RC_\alpha =]-\infty, -1.96] \cup [1.96, +\infty[$

$\Rightarrow z_{obs} \in RC_\alpha \quad \Rightarrow$ rejeitar H_0

② v.a. fulcral $\quad Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{1/5} \sim N(0,1) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow IC_{95\%}(\mu) = \left[8.5 - \frac{1.96}{5}, 8.5 + \frac{1.96}{5}\right] \simeq [8.11, 8.89]$

$\Rightarrow \mu_0 = 8 \notin IC_{95\%}(\mu) \quad \Rightarrow$ rejeitar H_0

<u>Nota</u>: se $\mu_0 = 8.11$ ou 8.89 (em vez de 8)

teríamos $z_{obs} = 5(8.5 - \mu_0) \approx \begin{cases} 1.96, & \mu_0 = 8.11 \\ -1.96, & \mu_0 = 8.89 \end{cases}$

i.e. $|z_{obs}| =$ valor crítico de RC_α

③ Teste bilateral $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ valor-p $= 2 \min\{P(Z_{H_0} < 2.5), P(Z_{H_0} > 2.5)\}$

$= 2P(Z_{H_0} > 2.5) = 2(1 - \Phi(2.5)) = 2(1 - 0.9938) =$

$= 0.0124 \simeq 1.2\%$.

$\Rightarrow \alpha = 5\% > 1.2\% =$ valor-p $\Rightarrow$ rejeitar H_0

(Vemos aqui que para $\alpha = 1\%$ a decisão já seria não rejeitar H_0.)