Cap. 8 Testes de Hipóteses

8.0 Noções básicas

- Hipótese estatística: conjetura sobre uma característica da população.
- Teste de hipóteses: procedimento estatístico para decidir se os dados sustentam ou não uma hipótese estatística.
- Vamos abordar:
  - → Testes paramétricos
  - → Testes de ajustamento

- Testes paramétricos

Dada uma determinada população com distribuição $F_X(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, queremos testar se

$$\underbrace{\theta \in \Theta_0 \subset \Theta}_{H_0 = \text{hipótese nula}} \quad \text{versus} \quad \underbrace{\theta \in \Theta_1 \subset \Theta}_{H_1 = \text{hipótese alternativa}}$$

com $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$

Tipos de hipóteses

Simples: especificado um só valor p/ o parâmetro

Compostas: especificado mais do que um valor p/ o parâmetro.

Nota: vamos considerar sempre H_0 simples.

Tipos de testes

Unilaterais: H_1 apenas contempla valores à direita ou à esquerda de H_0.

(e.g. $H_0: \mu = 2$ vs $H_1: \mu < 2$ – unilateral à esq.

ou $H_0: \mu = 2$ vs $H_1: \mu = 5$ – unilateral à dir.)

Bilaterais: H_1 contempla valores à direita e à esquerda de H_0.

(e.g. $H_0: \mu = 2$ vs $H_1: \mu \neq 2$)

- Estrutura geral de um teste de hipóteses

1. Definir as hipóteses
2. Recolher uma amostra aleatória representativa
3. Calcular o valor de uma estatística de teste adequada.
4. Tomar uma decisão e interpretá-la.

→ Temos as seguintes possibilidades associadas a uma decisão:

Decisão	Situação real mas desconhecida: H_0 é verdadeira	Situação real mas desconhecida: H_1 é verdadeira
Não rejeitar H_0	decisão correta	erro do tipo II
Rejeitar H_0	erro do tipo I	decisão correta

Probabilidade dos erros:

$$\alpha = P(\text{erro do tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verd.})$$

$$\beta = P(\text{erro do tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$$
$$= P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_1 \text{ verd.})$$

H_0 simples $\Rightarrow$ α é mais fácil de controlar.

<u>Região crítica</u>: dada uma estatística do teste $T = T(X_1, \dots, X_n)$, a sua Região Crítica (RC) é o conj^to^ de valores de T que nos levam a rejeitar H_0. Vai ser determinada com base em H_1 e fixando $\alpha = P(\text{erro do tipo I})$, i.e.

$$\boxed{P(T \in RC_\alpha \mid H_0 \text{ verd}) = \alpha}$$

α = nível de significância (usualm/ 1%, 5% ou 10%)

- <u>Procedimento geral de um teste de hipóteses paramétricas com α fixo</u>

1. Identificar o parâmetro de interesse e formular as hipóteses H_0 e H_1.
2. Fixar o nível de significância:
   $\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verd})$
3. Escolher estatística do test T, com distribuição conhecida admitindo H_0 verd.: $T \mid H_0 = T_{H_0}$.

Nota: de uma forma geral, as v.a.'s fulcrais usadas nos IC servem também como estatísticas do teste (substituindo o parâmetro desconhecido pelo valor postulado em H_0).

4. Calcular o valor observado da estatística de teste: t_{obs}.
5. Identificar a região crítica ou de rejeição: RC_α.
6. Decidir: $t_{obs} \in RC_\alpha \Rightarrow$ rejeitar H_0, c.c. não rejeitar H_0 (ou melhor, não há evidência suficiente para rejeitar H_0).

8.1 Teste para o valor esperado de uma normal com variância conhecida

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \mu >, <, \neq \mu_0$$

$$Z_{H_0} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

RC_α:

- $H_1: \mu \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} : z < -c \vee z > c \}$ com $c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} : z > c \}$ c/ $c = \Phi^{-1}(1-\alpha)$
- $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} : z < c \}$ c/ $c = \Phi^{-1}(\alpha)$

Nota: c é designado por valor crítico.

Exemplo $X \sim N(\mu, 1)$, $n = 25$, $\bar{x} = 8.5$.

Queremos avaliar, ao nível de significância de 5%, se $\mu = 8$.

$H_0: \mu = 8$ vs $H_1: \mu \neq 8$

$$Z_{H_0} = \frac{\bar{X} - 8}{1/\sqrt{25}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1), \quad \alpha = 0.05$$

$$\Rightarrow c = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96 \Rightarrow RC_{0.05} =]-\infty, -1.96] \cup [1.96, +\infty[$$

$$\bar{x} = 8.5 \Rightarrow z_{obs} = \frac{8.5 - 8}{1/5} = 2.5 \in RC_{0.05}$$

$\Rightarrow$ rejeita-se H_0

Alternativas unilaterais:

① $H_0: \mu = 8$ vs. $H_1: \mu > 8$

$$\Rightarrow RC_{0.05} = [c = \Phi^{-1}(0.95), +\infty[= [1.645, +\infty[$$

$z_{obs} = 2.5 \in RC_{0.05} \Rightarrow$ rejeita-se H_0.

② $H_0: \mu = 8$ vs $H_1: \mu < 8$

$$\Rightarrow RC_{0.05} =]-\infty, c = \Phi^{-1}(0.05)] =]-\infty, -1.645]$$

$z_{obs} = 2.5 \notin RC_{0.05} \Rightarrow$ não existe evidência para rejeitar H_0

8.2 Teste para o valor esperado de uma normal com variância desconhecida

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu >, <, \neq \mu_0$

$$Z_{H_0} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}$$

RC_α:

- $H_1: \mu \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} : z < -c \vee z > c \}$
  com $c = F^{-1}_{t_{n-1}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $H_1: \mu > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} : z > c \}$ c/ $c = F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha)$
- $H_1: \mu < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ z \in \mathbb{R} : z < c \}$ c/ $c = F^{-1}_{t_{n-1}}(\alpha)$

Exemplo: $X = N(\mu, \sigma^2)$, $n = 5$, $\bar{x} = 3.1063$, $s = 0.014946$

Queremos avaliar, ao nível de significância de 1%, se $\mu = 3$.

$H_0: \mu = 3$ vs $H_1: \mu \neq 3$

$$Z_{H_0} = \frac{\bar{X} - 3}{S/\sqrt{25}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_4 \quad , \quad \alpha = 0.01$$

$\Rightarrow c = F^{-1}_{t_4}(0.995) = 4.6 \Rightarrow RC_{0.01} =]-\infty, -4.6] \cup [4.6, +\infty[$

$\bar{x} = 3.1063 \Rightarrow z_{obs} = \frac{3.1063 - 3}{0.014946/\sqrt{5}} = 15,90 \in RC_{0.01}$

$\Rightarrow$ rejeita-se H_0