7.1 IC para μ de uma normal, σ^2 conhecida

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $E(X) = \mu$ desconhecido

$V(X) = \sigma^2$ conhecida

$(X_1, \dots, X_n)$ a.a., $\hat{\mu} = \overline{X}$ = estimador pontual de μ

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \qquad \text{v.a. fulcral}$$

$$IAC_\gamma(\mu) = \Big[\underbrace{\overline{X} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}}_{T_1}, \underbrace{\overline{X} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}}_{T_2}\Big] \quad \text{e}$$

$$\boxed{IC_{(\gamma \times 100)\%}(\mu) = \left[\bar{x} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

$$a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

Interpretação do IC - observações:

- O IC numérico obtido pode ou não conter o verdadeiro valor do parâmetro desconhecido μ.
- O que sabemos é que para um número grande de IC_γ obtidos desta forma, espera-se que aprox. uma proporção γ contenha o verdadeiro valor de μ (que continuará, no entanto, a ser desconhecido).
- Quanto menor for o comprimento do IC, maior será a precisão da estimativa pontual. Por

exemplo, mantendo fixos γ e σ, quando n aumenta o comprimento do IC diminui.

- Se aumentarmos o grau de confiança γ, com n e σ fixos, aumenta o comprimento do IC (pq aumenta $\underline{a}$). E.g.: $\gamma = 1 \Rightarrow a = +\infty$
$\Rightarrow IC = \mathbb{R}$ //

(7.2) IC para μ de uma normal, σ^2 desconhecida

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $E(X) = \mu$ desconhecido
$V(X) = \sigma^2$ desconhecida (mais realista)

$(X_1, \dots, X_n)$ a.a., $\hat{\mu} = \overline{X}$ = estimador pontual de μ,

$$\hat{\sigma^2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - n\,\overline{X}^2\right] = \text{estimador}$$

pontual de σ^2

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$\leftarrow$ só depende de μ e da a.a., mas qual a sua distribuição?

Teorema: $T \sim t_{n-1}$ = distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade (cf. gráfico abaixo e tabela)

$\Rightarrow$ distribuição de T é independente de μ

$\Rightarrow T$ é v.a. fulcral

Logo, de forma análoga ao caso 7.1 anterior, temos:

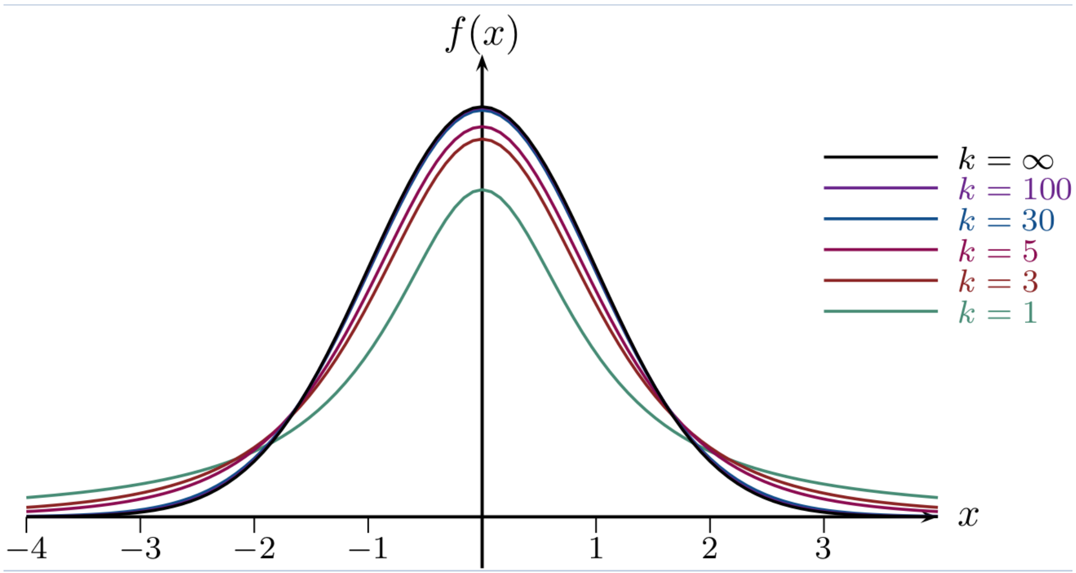
$$a = F^{-1}_{t_{n-1}}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

[distrib. t_{n-1} tb é simétrica]

$$IAC_\gamma(\mu) = \Big[\underbrace{\bar X - \frac{aS}{\sqrt{n}}}_{T_1}, \underbrace{\frac{\bar X + aS}{\sqrt{n}}}_{T_2}\Big] \quad e$$

$$\boxed{IC_{(\gamma\times 100)\%}(\mu) = \left[\bar x - \frac{as}{\sqrt{n}}, \bar x + \frac{as}{\sqrt{n}}\right]}$$

Nota: largura do IC depende de γ, n e da amostra (via s).



Exemplo 1a) supondo σ desconhecido

$X \sim N(\mu, \cancel{4}\,\sigma^2)$, amostra com $n=10$ e valores observados $(8.7, 9.1, 10.0, 11.9, 11.7, 8.9, 10.4, 11.2, 10.2, 8.9)$

(a) Determine um IC a 95% para μ.

$$\gamma = 0.95 \Rightarrow a = \underset{F_{t_9}^{-1}}{\cancel{\Phi^{-1}}}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = \underset{F_{t_9}^{-1}}{\cancel{\Phi^{-1}}}(0.975) \overset{\text{tabela}}{=} \underset{2.262}{\cancel{1.96}}$$

$$\Rightarrow IAC_{95\%}(\mu) = \left[\bar X - \overset{\frac{2.262\times S}{\sqrt{10}}}{\cancel{\frac{1.96}{\sqrt{10}}}}, \bar X + \overset{\frac{2.262\times S}{\sqrt{10}}}{\cancel{\frac{1.96}{\sqrt{10}}}}\right] \simeq [\bar X - \cancel{0.62}, \bar X + \cancel{0.62}] \quad 0.715\times S$$

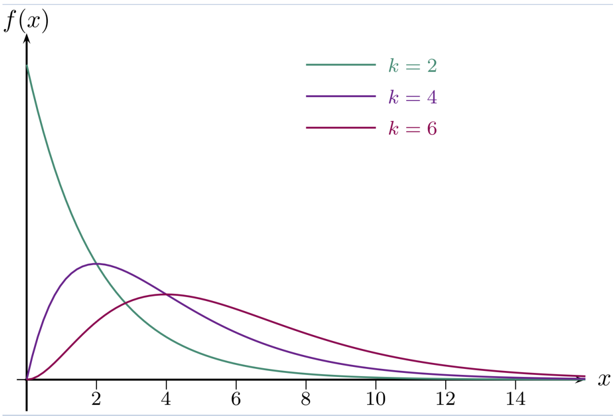
Como $\bar x = 10.1$ e $s = 1.2$, temos que

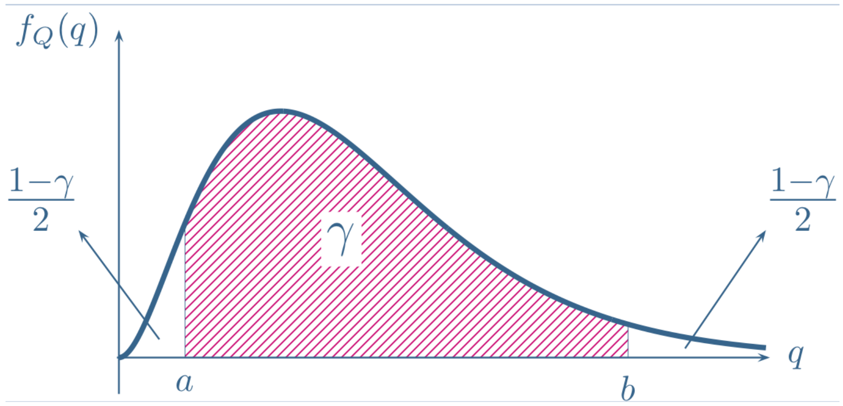
$$IC_{95\%}(\mu) = [10.1 - \underset{0.86}{\cancel{0.62}}, 10.1 + \underset{0.86}{\cancel{0.62}}] = [\underset{9.24}{\cancel{9.48}}, \underset{10.96}{\cancel{10.72}}]$$

7.3 IC para σ^2 de uma $N(\mu,\sigma^2)$, c/ μ desconhecido

$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $(X_1,\dots,X_n)$ a.a.

V.a. fulcral: $Q = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ — qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade (cf. tabela e figuras)





Escolhem-se $0<a<b$ t.q. $P(a \le Q \le b) = \gamma$

via $\boxed{a = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \quad e \quad b = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}$.

Tendo em conta que

$$P(a\le Q\le b) = \gamma \iff P\left(a \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le b\right) = \gamma \iff$$

$$\iff P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = \gamma$$

obtemos $IAC_\gamma(\sigma^2) = \left[\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{b}}_{=T_1}, \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{a}}_{=T_2}\right]$

e $\boxed{IC_{(\gamma\times 100)\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^2}{b}, \frac{(n-1)s^2}{a}\right]}$

Exemplo $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, a.a. com $n=10$ e valores observados (8.7, 9.1, 10.0, 11.9, 11.7, 8.9, 10.4, 11.2, 10.2, 8.9)

Já sabemos que $\bar{x} = 10.1$ e $s^2 = (1.2)^2 = 1.44$.

Determine $IC_{99\%}(\sigma)$.

$\gamma = 0.99 \Rightarrow a = F^{-1}_{\chi^2_9}(0.005) = 1.735$ e $b = F^{-1}_{\chi^2_9}(0.995) = 23.59$

$$\Rightarrow IC_{99\%}(\sigma^2) = \left[\frac{9 \times 1.44}{23.59}, \frac{9 \times 1.44}{1.735}\right] = [0.549, 7.470]$$

e $IC_{99\%}(\sigma) = \left[\sqrt{0.549}, \sqrt{7.470}\right] = [0.74, 2.73]$ //

7.4 IC aproximado para uma probabilidade de sucesso (proporção populacional)

$X \sim Ber(p)$, a.a. $(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 30$

V.a. fulcral: $Z = \dfrac{\bar{X} - p}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

(TLC + ...)

$$P(-a \leq Z \leq a) \simeq \gamma \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - a\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} + a\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right) \simeq \gamma$$

$$\Rightarrow IAC_\gamma(p) \simeq \left[\bar{X} - a\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + a\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$$

e

$$\boxed{IC_{(\gamma \times 100)\%}(p) \simeq \left[\bar{x} - a\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}, \bar{x} + a\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}\right] \quad \text{com} \quad a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right).}$$

Exercício 7.2: Uma amostra de 100 peças de uma linha de produção revelou 17 peças defeituosas.

(a) Def. um IC aprox. a 95% para a verdadeira proporção p de peças defeituosas produzidas.

(b) Quantas peças adicionais devem ser recolhidas para estarmos confiantes a 98% que o erro de estimação de p seja menor do que 2%?

(a) $\hat{p} = \bar{x} = \frac{17}{100} = 0.17$, $\gamma = 0.95 \Rightarrow a = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$

$\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{100}} = \sqrt{\frac{0.17(1-0.17)}{100}} \simeq 0.038$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(p) \simeq \left[0.17 - \underbrace{1.96 \times 0.038}_{\simeq 0.074 = 7,4\% = \text{"margem de erro"}},\ 0.17 + \underbrace{1.96 \times 0.038}\right]$$

$= [0.096, 0.244]$ //

(b) Pretende-se determinar n tal que

$$P(|\bar{X}-p| < 0.02) \geq 0.98 \Leftrightarrow P(-0.02 < \bar{X}-p < 0.02) \geq 0.98$$

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{0.02}{\sqrt{V(\bar{X})}} < \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{V(\bar{X})}} < \frac{0.02}{\sqrt{V(\bar{X})}}\right) \geq 0.98 \quad (*)$$

Supondo $n > 30$, temos que

$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \quad \text{(pelo TLC)}$$

Logo $(*) \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \geq 0.98$

$$\Leftrightarrow 2\,\Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right)-1 \geq 0.98 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \geq \frac{1+0.98}{2} = 0.99$$

$$\Rightarrow \frac{0.02}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \Phi^{-1}(0.99) = 2.3263 \quad \text{(tabela)}$$

$$\Rightarrow \quad n \geq \left(\frac{2.3263}{0.02}\right)^2 \times p(1-p)$$

Desconhecemos p mas sabemos que o máximo de $p(1-p)$ ocorre para $p = 1/2$ e é igual $1/4$. Podemos então considerar

$$n \geq \left(\frac{2.3263}{0.02}\right)^2 \times \frac{1}{4} \simeq 3382{,}3$$

$\Rightarrow \quad n \geq 3383$ peças $\Rightarrow$ $n-100 \geq 3283$ peças adicionais

- Adicional ao que foi feito em aula:

IC aprox. para o parâmetro λ de $\mathrm{Exp}(\lambda)$

$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, a.a. $(X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 30$

V.a. fulcral: $Z = \dfrac{\bar{X} - E(X)}{\sqrt{\frac{V(X)}{n}}} = \dfrac{\bar{X} - 1/\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^{-2}}{n}}} =$

$$= \sqrt{n}\,(\lambda \bar{X} - 1) \overset{a}{\sim} N(0,1) \quad \text{(pelo TLC)}$$

$$\Rightarrow P(-a \leq Z \leq a) \simeq \gamma \quad \text{para} \quad \boxed{a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}$$

e $P(-a \leq Z \leq a) \simeq \gamma \Leftrightarrow P\left(-a \leq \sqrt{n}(\lambda \bar{X} - 1) \leq a\right) \simeq \gamma$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1 - a/\sqrt{n}}{\bar{X}} \leq \lambda \leq \frac{1 + a/\sqrt{n}}{\bar{X}}\right) \simeq \gamma$$

pelo que

$$IAC_\gamma(\lambda) \simeq \left[\frac{1 - a/\sqrt{n}}{\bar{X}}, \frac{1 + a/\sqrt{n}}{\bar{X}}\right]$$

e

$$\boxed{IC_{(\gamma \times 100)\%}(\lambda) \simeq \left[\frac{1 - a/\sqrt{n}}{\bar{x}}, \frac{1 + a/\sqrt{n}}{\bar{x}}\right]}$$

<u>Exemplo</u> $X \sim Exp(\lambda)$, $n = 100$, $\bar{x} = 2.5$, $IC_{95\%}(\lambda) = ?$

$\gamma = 0.95 \Rightarrow a = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$

$$\Rightarrow IC_{95\%}(\lambda) \simeq \left[\frac{1 - 1.96/10}{2.5}, \frac{1 + 1.96/10}{2.5}\right]$$

$$= [0.3216, 0.4784] \,//$$