(5.2) Teorema do Limite Central

- $(X_1, \dots, X_n, \dots)$ sucessão de v.a.'s i.i.d. com $E(X_i) = \mu$ e $V(X_i) = \sigma^2$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{e} \quad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

$\underset{\text{TLC}}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \\[2ex] \dfrac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \overset{a}{\sim} N(0,1) \end{array}}$$

- Mais observações:

(4) Geralmente considera-se n grande qdo $n \geq 30$.

(5) Aplicação do TLC para distribuições discretas

É comum adoptar a chamada correção de continuidade: escolhe-se $0 < \delta < 1$ e sendo $\tilde{X}$ a v.a. normal que aproxima a v.a. discreta X considera-se por exemplo:

$$P(X = a) \simeq P(a - \delta \leq \tilde{X} \leq a + \delta)$$

$$P(a < X < b) \simeq P(a + \delta \leq \tilde{X} \leq b - \delta)$$

$$P(X \leq a) \simeq P(\tilde{X} \leq a + \delta)$$

$$P(X < a) \simeq P(\tilde{X} \leq a - \delta)$$

(6) $X \sim Bin(n,p)$ = soma de n v.a.'s i.i.d. com distribuição $Ber(p)$

$$\underset{TLC}{\Longrightarrow} \quad \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

i.e. $\boxed{X \sim Bin(n,p) \text{ pode ser aproximada por } \tilde{X} \sim N(np, np(1-p))}$

Esta aproximação é geralmente usada escolhendo $\boxed{\delta = 0.5}$ e quando $\boxed{np > 5 \text{ e } n(1-p) > 5.}$

<u>Exemplo</u>: $X \sim Bin(20, 1/2)$ $E(X) = 10$, $V(X) = 5$

Usando $\tilde{X} \sim N(10, 5)$ para aproximar X, temos por exemplo

$$F_X(10) = P(X \leq 10) \simeq P(\tilde{X} \leq 10 + 1/2) = \Phi\left(\frac{1/2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(0.22) = 0.5871$$

$$F_X(12) = P(X \leq 12) \simeq P(\tilde{X} \leq 12 + 1/2) = \Phi\left(\frac{5/2}{\sqrt{5}}\right) = \Phi(1.11) = 0.8665$$

Tabela da $Bin(20, 1/2)$: $F_X(10) = 0.5881$, $F_X(12) = 0.8684$

(7) $X \sim Poisson(\lambda)$ = soma de n v.a.'s i.i.d. com distribuição $Poisson(\lambda/n)$

$$\underset{TLC}{\Longrightarrow} \quad \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

i.e. $\boxed{X \sim Poisson(\lambda) \text{ pode ser aproximada por } \tilde{X} \sim N(\lambda, \lambda)}$

Esta aproximação é geralmente usada escolhendo $\boxed{\delta = 0.5}$ e quando $\boxed{\lambda > 5}$

<u>Exemplo</u>: $X \sim \text{Poisson}(10)$, $E(X) = 10$, $V(X) = 10$

Usando $\tilde{X} \sim N(10, 10)$ para aproximar X, temos por exemplo

$$F_X(10) = P(X \leq 10) \simeq P(\tilde{X} \leq 10 + 1/2) = \Phi\left(\frac{1/2}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(0.16) = 0.5636$$

$$F_X(12) = P(X \leq 12) \simeq P(\tilde{X} \leq 12 + 1/2) = \Phi\left(\frac{5/2}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(0.79) = 0.7852$$

Tabela da Poisson(10): $F_X(10) = 0.5830$, $F_X(12) = 0.7916$.

- <u>Exemplo</u>: Uma empresa de chocolates embala pacotes como 100 caixas de bombons. Os pesos por caixa são v.a.'s i.i.d. X_i com $E(X_i) = 0.5$ Kg e $V(X_i) = 0.1$ Kg^2. Uma palete leva 10 pacotes. Qual é a probabilidade aproximada do peso dos bombons numa palete ser superior a 510 Kg?

$$W = \sum_{i=1}^{1000} X_i \equiv \text{v.a. peso dos bombons numa palete em Kg.}$$

$$E(W) = \sum_{i=1}^{1000} E(X_i) \underset{\text{id. dist.}}{=} 1000 \times 0.5 = 500 \text{ Kg.}$$

$$V(W) = V\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i\right) \underset{\text{ind.}}{=} \sum_{i=1}^{1000} V(X_i) \underset{\text{id. dist.}}{=} 1000 \times 0.1 = 100$$

ind. + id. dist.

$$\text{TLC} \Rightarrow \frac{W - E(W)}{\sqrt{V(W)}} = \frac{W - 500}{10} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

$$\Rightarrow P(W>510) = 1 - P(W \leq 510) = 1 - P\left(\frac{W-500}{10} \leq 1\right)$$

$$\underset{TLC}{\approx} 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587$$

- <u>Exemplo</u> O número de chamadas de telemóvel registadas numa determinada zona durante uma hora tem distribuição de Poisson de parâmetro 1500. Calcule a probabilidade de ocorrerem mais de 1600 chamadas na próxima hora.

$X \sim \text{Poisson}(1500)$, $E(X) = V(X) = 1500$

Vamos aproximar por $\tilde{X} \sim N(1500, 1500)$.

$$P(X>1600) = 1 - P(X \leq 1600) \simeq 1 - P(\tilde{X} \leq \underline{1600.5})$$

$$= 1 - P\left(\frac{\tilde{X} - 1500}{\sqrt{1500}} \leq \frac{1600.5 - 1500}{\sqrt{1500}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2.59) \simeq 1 - 0.9952 = 0.0048$$

- <u>Exercício 5.1</u>

O tempo (em horas) que João Pestana dorme por noite é uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(7, 12)$.

(a) Calcule a probabilidade de JP dormir mais de 11 horas numa noite.

(b) Calcule a prob. de, em 20 noites, JP dormir mais de 11 horas em pelo menos 3 dessas noites.

(c) Calcule a prob. de JP dormir mais de 1100 horas em 100 noites?

Resolução

X = v.a. nº de horas que JP dorme p/ noite

$X \sim Unif(7, 12) \Rightarrow E(X) = 9.5,\ V(X) = \frac{25}{12}$

$f_X(x) = \frac{1}{5},\ 7 \leq x \leq 12$

$P(X > 11) = \int_{11}^{12} 1/5 = 1/5$ // (a)

Y = v.a. nº de noites que JP dorme mais de 11 horas em 20 noites.

$Y \sim Bin(20, 1/5)$, $20 \times 1/5 = 4 \cancel{>} 5 \Rightarrow$ não aproximar por normal.

$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - F_Y(2) =$

$\underset{\text{tabela}}{=} 1 - 0.2061 = 0.7939$ // (b)

S = v.a. nº de horas que JP dorme em 100 noites

$S = \sum_{i=1}^{100} X_i$, $X_i \sim Unif(7, 12)$, $E(X_i) = 9.5,\ V(X_i) = \frac{25}{12}$ } Vamos assumir indep.

$$\Rightarrow \quad E(S) = 100 \times 9.5 = 950, \quad V(S) = 100 \times 25/12$$

$$P(S > 1100) = 1 - P(S \leq 1100) = 1 - P\left(\frac{S-950}{50/\sqrt{12}} \leq \frac{150}{50/\sqrt{12}}\right)$$

$$\underset{TLC}{\approx} 1 - \Phi(3\sqrt{12}) \simeq 1 - \Phi(10.39) \simeq 1 - 1 = 0 \text{ // (c)}$$

- 1º sem. 21/22, Exame 2 de 24/02/2022 às 10:30

(5) X_i = oscilação no preço (€) das ações de uma empresa no minuto i

v.a.'s i.i.d. com $P(X=x) = \begin{cases} 0.5, & x=-0.05 \\ 0.2, & x=0 \\ 0.3, & x=0.05 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$V(X) = 0.0019$.

Calcule a prob. aproximada de em 3 horas a oscilação total ser superior a 15 cêntimos.

Resolução

- $E(X) = -0.05 \times 0.5 + 0.05 \times 0.3 = -0.05 \times 0.2 = -0.01$ //
- 3 horas = 180 minutos
- $S = \sum_{i=1}^{180} X_i$ = oscilação total em 3 horas

$$E(S) = 180 \times (-0.01) = -1.8, \quad V(S) = 180 \times 0.0019 = 0.342$$

- $P(S > 0.15) = 1 - P(S \leq 0.15)$

$$= 1 - P\left(\frac{S-(-1.8)}{\sqrt{0.342}} \leq \frac{0.15-(-1.8)}{\sqrt{0.342}}\right) \approx$$

$$\underset{TLC}{\approx} 1 - \Phi\left(\frac{1.95}{\sqrt{0.342}}\right) \simeq 1 - \Phi(3.33) \underset{\text{tabela}}{=} 1 - 0.999566$$

$$= 0.000434 \text{ //}$$