

8ª Aula Prática

1) Considere a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$D = \{(x, y) : xy > 0\}$$
$$f(x, y) = x \log(xy)$$

- a) Interprete geometricamente o domínio D e determine o seu interior, exterior e fronteira. Diga se D é aberto, fechado, limitado. (Justifique a resposta.)
- b) A função f é contínua no seu domínio? Justifique a resposta.
- c) Mostre que para qualquer semi-recta S com origem no ponto $(0, 0)$ e contida em D o limite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y)$$

existe e não depende de S .

- d) Sendo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{-1/x^2}\}$, calcule, se existir, o limite:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in E}} f(x, y)$$

- e) Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$? Justifique a resposta.

2) Considere a função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy - 1}},$$

onde $D = \{(x, y) : xy > 1\}$.

- a) Interprete geometricamente o domínio.
- b) Justifique que f é contínua em D .
- c) Existe algum ponto fronteiro a D ao qual f seja prolongável por continuidade?
- d) Indique o contradomínio de f .

3) Estude quanto à continuidade a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x^2 + y^2 < 2y \\ |x| & \text{se } x^2 + y^2 = 2y \\ y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 2y \end{cases}$$

4) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x, y) = 1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Calcule, se existir, o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

5) Repita o exercício anterior, com a função

$$f(x, y) = 1 + xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

6) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.