4ª Aula Prática

1) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x}{x^2-25}\,dx$

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx$

c) $\displaystyle\int_e^{e^2} x\log x\,dx$

2) Considere a função $F:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ definida pela identidade:

$$F(x)=\int_1^x \frac{e^{\frac{t^2+1}{t}}}{t}\,dt$$

a) Mostre que $F(\frac{1}{x})=-F(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

b) Mostre que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e calcule $F'(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

3) Sendo F a função definida em $\mathbb{R}$ pela seguinte expressão, calcule $F'(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

a) $F(x)=\displaystyle\int_x^0 \operatorname{sen}^2 t\,dt$

b) $F(x)=\displaystyle\int_x^{x^2} \log(1+t^2)\,dt$

c) $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{e^{x+t}}{t^2+1}\,dt$

4) Dada uma função contínua $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, mostre que a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x)=\int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$$

é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

5) Mostre que existe uma (e uma só) função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que verifica as seguintes condições:

$$\begin{cases} f''(x)=\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} & \text{para todo } x\in\mathbb{R}\\ f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

6) Considere a função $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2^n} & \text{para } x\in[1-\frac{1}{2^n},1-\frac{1}{2^{n+1}}[\text{ (para todo } n\in\mathbb{N}_0)\\ f(1)=0 \end{cases}$$

Mostre que f é integrável em $[0,1]$ e calcule o seu integral.

7) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

b) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}\,dx$ (Sugestão: substituição $x = 1/t$)

c) $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ ($x = \operatorname{sen}^2 t$)

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$ ($\operatorname{cotg} x = t$)