

13ª Aula Prática

- 1) Sabendo que $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e que $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $\psi(x, y, z) = \varphi(x - y, y - z, z - x)$, mostre que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{para qualquer } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.)$$

- 2) Supondo que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, considere a função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x, y) = f(x, x + y, xy)$$

- a) Exprima $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f .
b) Aproveite o resultado anterior para verificar a igualdade

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)(2, 1) - \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)(2, 1) = f'_1(2, 3, 2) - f'_3(2, 3, 2) .$$

- 3) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = 2e^{-x} \operatorname{ch} x - 1 + \frac{1}{2}x$$

- a) Verifique se a função f tem extremos locais em $\mathbb{R}^+$.
b) Indique um majorante do erro cometido ao aproximar f pelo polinómio obtido na alínea anterior no intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.
4) Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = (x - 1)^4 \sin x$$

- a) Mostre que 1 é ponto de estacionaridade de f , e recorra à fórmula de Taylor da função f para determinar a sua natureza.
b) Escreva a fórmula de Taylor de ordem zero da função $\sin$ relativa ao ponto 1, e aproveite para resolver o problema da alínea anterior de maneira alternativa.
5) Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xye^{x-y} .$$

- 6) Considere a função f definida por

$$f(x, y, z) = \frac{z(x - y)^2}{(x - y)^4 + z^2}$$

no domínio de existência desta expressão.

- a) Determine todos os limites (na origem) segundo rectas.
b) Mostre que a função não tem limite na origem.