12ª Aula Prática

1) Sendo F uma função real com derivada contínua em $\mathbb{R}$ e $z = xy + xF(y/x)$, mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

para todo $x \neq 0$.

2) Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = G(x^2 - y^2, y^2 - z^2) \ ,$$

onde G é uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Indique em que pontos F é diferenciável e mostre que

$$yzF'_x(x, y, z) + xzF'_y(x, y, z) + xyF'_z(x, y, z) = 0$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3) Sabendo que f é uma função real de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, considere a função G definida por $G(u, v) = f(u^2 + v^2, u/v)$. Mostre que para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v \neq 0$ a derivada $G'_{(u,v)}(u, v)$ existe e é dada por

$$G'_{(u,v)}(u, v) = 2(u^2 + v^2)D_1f(u^2 + v^2, u/v) \ .$$

4) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(-1, 1) = -1$, considere a função G definida pela expressão $G(x, y) = f\big(f(x, y), f^2(x, y)\big)$. Mostre que

$$\frac{\partial G}{\partial x}(-1, 1) + 2\frac{\partial G}{\partial y}(-1, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)\right)^2 - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)\right)^2 .$$

5) Sendo f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$u(x, t) = af(x + ct) + bf(x - ct) \ ,$$

com a, b e c constantes reais e $c \neq 0$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

para quaisquer x e t.

6) Sabendo que F é uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ com derivadas mistas de segunda ordem nulas, mostre que

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

para $x, y \neq 0$, sendo u a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão $u(x, y) = F(x^2 - y^2, y^2)$.