

11^a Aula Prática

- 1) Seja $F : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \frac{\sqrt{y^2 - x}}{x} \right),$$

no domínio de existência desta expressão.

- a) Represente geometricamente o domínio D .
- b) Determine o domínio de diferenciabilidade de F .
- c) Calcule $F'_{(1,1)}(1, 2)$.

- 2) Considere a função $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$g_1(u, v, w) = e^u \cos v \cos w$$

$$g_2(u, v, w) = e^u \cos v \sin w$$

$$g_3(u, v, w) = e^u \sin v$$

- a) Determine o domínio de diferenciabilidade de g e defina a derivada $g'(0, 0, 0)$.
- b) Sendo f uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$, diferenciável no ponto $(1, 0, 0)$, mostre que $f \circ g$ é diferenciável em $(0, 0, 0)$ e determine $(f \circ g)'(0, 0, 0)$, sabendo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 0) = (1, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 0) = (-1, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 0) = (-1, 3)$$

- 3) Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(u, v) = \arctg(u^2 + v) .$$

Calcule $(\psi \circ \varphi)'(0, 0, 0)$, sabendo que $\varphi(0, 0, 0) = (1, 2)$ e que as coordenadas da derivada de φ no ponto $(0, 0, 0)$ são as funções dadas por:

$$L_1(x, y, z) = 2x + 3y + z$$

$$L_2(x, y, z) = x - y + z$$

- 4) Considere as aplicações $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad g(t) = e^t$$

- a) Estude f e g quanto à continuidade. Verifique que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 0)$.
- b) Designando por F o prolongamento por continuidade de f , calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$.
- c) Verifique que F é diferenciável em todo o seu domínio.

- d) Sendo h um vector não nulo de $\mathbb{R}^2$, determine $F'_h(0, 0)$.
e) Estude a função $\varphi = g \circ F$ quanto à continuidade e diferenciabilidade.
f) Calcule $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0)$.
g) Sendo ψ a aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y)e_1 + e^{x^2+y^2}e_2 \quad (\text{com } (e_1, e_2) = \text{base canónica}),$$

calcule a derivada de ψ no ponto $(0, 0)$.

- 5) Considere a função $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \int_{y+2}^{xy^2-x} \frac{f(t)}{t} dt ,$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e $D = \{(x, y) : (y+2)(xy^2-x) > 0\}$.

- a) Represente geometricamente o domínio D .
b) Determine o domínio de diferenciabilidade de g e calcule as derivadas parciais de g .