10ª Aula Prática

1) Considere as funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais de f e de g, nos pontos em que existam.

2) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x \operatorname{sen} y\ .$$

Verifique se a função é diferenciável no ponto (1,0), recorrendo à definição de diferenciabilidade.

3) Estude a função f definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pela expressão

$$f(x,y,z) = e^{-1/(x^2+y^2+z^2)}$$

quanto à diferenciabilidade, e calcule as suas derivadas parciais.

4) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x+y > 0 \\ x+y & \text{se } x+y \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule, caso existam, as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

b) Determine, se existirem, as derivadas de f segundo o vector $(1,1)$ nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

5) Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

b) Calcule $g'_{(1,1)}(0,0)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$?

6) Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em todo o seu domínio.

b) Estude f quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.