Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1º Sem. 2005/06

5ª Ficha de Exercícios

I. Continuidade de Funções.

1) Seja $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Supondo que existe uma sucessão (x_n) de termos em $[a,b]$ tal que $\lim \varphi(x_n) = 0$, prove que φ tem pelo menos um zero em $[a,b]$.

2) Sendo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

(a) Não existe qualquer sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = 1/n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$.

3) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\frac{1}{x^2}} \\ g(x) &= x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(c) Mostre que são funções limitadas.

4) Considere as funções f e g definidas em $]0,+\infty[$ por

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \log(1+x) \\ g(x) &= \sqrt{x} \sin \frac{1}{x^2}\ . \end{aligned}$$

(a) Estude as funções no que respeita à continuidade.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(c) Indique, justificando, se são prolongáveis por continuidade ao ponto 0.

(d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x > 0 \\ \\ \dfrac{1}{x^2+1} & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

6) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{x}} & , \ x > 0 \\ \\ x(2-x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

7) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & , \ x > 0 \\ & \\ (x+k)(2+x) & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

8) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(2 + \frac{k}{x}\right) & , \ x > 1 \\ & \\ 1 - x^2 & , \ x < 1 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto 1.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

9) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} & , \ x > 0 \\ \\ k(x+1)^2 & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

10) Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{2(1+x)}\right) & , \ x > 0 \\ \\ (x+1)^2 - k & , \ x < 0 \ . \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

(a) Estude a função f no que respeita à continuidade no seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(c) Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para o qual a função f é prolongável por continuidade ao ponto zero.

(d) Denotando por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse prolongamento por continuidade, indique justificando o contradomínio de F.

II. Propriedades Globais das Funções Contínuas

1) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Indique, justificando, a natureza da série

$$\sum \frac{f(\sin n)}{n^2} \ .$$

2) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[0,1]$, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o $x \in [0,1]$. Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in [0,1]$ com $f(c) = c$. [Sugestão: aplique o teorema de Bolzano a $g(x) = f(x) - x$.]

3) Seja f uma função contínua no intervalo limitado e fechado $[a,b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), tal que $f(a) \leq a$ e $f(b) \geq b$. Prove que f tem um ponto fixo em $[a,b]$.

4) Seja $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponha que existe $b > 0$ tal que $f(b) < f(x)$ para todo o $x > b$. Mostre que f tem mínimo em $[0,+\infty[$.

5) Dada uma função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, considere a função f que é definida em $[-1,1]$ por $f(x) = g(1-x^2)$.

(a) Supondo que g é contínua em todo o seu domínio, mostre que f tem máximo e mínimo.

(b) Supondo apenas que g é contínua em $]0,+\infty[$, poderemos garantir a existência de máximo e mínimo de f? Justifique.

6) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites de f quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

(a) Prove que f é limitada.

(b) Prove que f tem um ponto fixo, i.e. que existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ com $f(c) = c$.

(c) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique, justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2} \ .$$

7) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, com limites positivos quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, e tal que $f(0) < 0$. Mostre que:

(a) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos duas soluções reais.

(b) f tem mínimo em $\mathbb{R}$.

III. Cálculo de Derivadas de Funções.

1) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ (b) $f(x) = x^4 + \sin(x)$ (c) $f(x) = x^4 \sin(x)$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos(x)}$

(g) $f(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{1-\sin(x)}$ (h) $f(x) = \dfrac{x\sin(x)}{1+x^2}$ (i) $f(x) = \sinh(x)\cosh(x)$

2) (a) A área de uma círculo de raio r é πr^2 e o seu perímetro é $2\pi r$. Mostre que a taxa de variação da área em relação ao raio é igual ao perímetro.

(b) O volume de uma esfera de raio r é $4\pi r^3/3$ e a área da sua superfície é $4\pi r^2$. Mostre que a taxa de variação do volume em relação ao raio é igual à área da superfície.

3) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = x^{3/2}$

(d) $f(x) = x^{-3/2}$ (e) $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/4}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

4) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \tan(x) - x$ (b) $f(x) = x\tan(x)$ (c) $f(x) = \cot(x) + x$

(d) $f(x) = \dfrac{\cot(x)}{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{\cot(x)}$ (f) $f(x) = \tan^2(x)$

5) Considere as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = x|x| \qquad \text{e} \qquad g(x) = e^{-|x|}\ .$$

Para cada uma destas funções,

(a) mostre que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e calcule a derivada;

(b) estude a diferenciabilidade no ponto 0.

6) Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & , \ x \neq 0 \\ \\ 0 & , \ x = 0\ . \end{cases}$$

7) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x)$ (b) $f(x) = \sin(e^x)$ (c) $f(x) = \sin(\cos^2(x))\cos(\sin^2(x))$

(d) $f(x) = \tan(x/2) - \cot(x/2)$ (e) $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}$ (f) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

(g) $f(x) = (2-x^2)\cos(x^2) + 2x\sin(x^3)$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (i) $f(x) = \left(\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$

8) Determine a derivada g' em termos de f' se:

(a) $g(x) = f(x^2)$ (c) $g(x) = f[f(x)]$

(b) $g(x) = f(\sin^2(x)) + f(\cos^2(x))$ (d) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$

9) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

10) Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\phi'(1)$ e $\phi''(e)$.

11) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \log(1+x^2)$ (b) $f(x) = x^2(1+\log x)$ (c) $f(x) = \log(\log x)$

(d) $f(x) = \log_x e$ (e) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ (f) $f(x) = e^{1/x}$ (g) $f(x) = 2^x$

(h) $f(x) = 2^{x^2}$ (i) $f(x) = e^{\cos^2 x}$ (j) $f(x) = e^{\log x}$ (k) $f(x) = x^x$

(l) $f(x) = (\log x)^x$ (m) $f(x) = x^{\log x}$ (n) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ (o) $f(x) = x^{1/x}$

12) Calcule $f'(x)$, sempre que exista, nos casos em que a função f é definida pela expressão:

(a) $f(x) = \arcsin(x/2)$ (b) $f(x) = \arccos(1/x)$ (c) $f(x) = \arcsin(\sin x)$

(d) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$ (e) $f(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ (f) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(g) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(\arccos\left(1/\sqrt{x}\right)\right)$ (i) $f(x) = e^{\arctan(x)}$

13) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & , \ x \leq 0 \\ \\ \arctan(1/x) & , \ x > 0 \ , \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$ fixos.

(a) Mostre que f é diferenciável no ponto 1 e escreva uma equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

(b) Sabendo que f é diferenciável no ponto 0, determine os valores de a e b.

(c) Defina f' e diga se a função f é de classe $C^1(\mathbb{R})$.

IV. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy. Extremos.

1) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero, $V_\epsilon(0)$ com $\epsilon > 0$, diferenciável em $V_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo o $x \in V_\epsilon(0) \setminus \{0\}$.

(a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é mínimo ou máximo. No caso de f ser diferenciável no ponto 0, qual será o valor de $f'(0)$?

(b) Mostre, por meio de um exemplo, que sem a hipótese de continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

2) Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(1) = f(-1) = 0$, mas que $f'(x)$ nunca é zero no intervalo $[-1, 1]$. Explique porque é que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

3) Seja $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0 \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N} \, .$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas.

(a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

(b) A função f é limitada.

(c) A função f' tem infinitos zeros.

4) Use o Teorema de Lagrange para deduzir as seguintes desigualdades:

(a) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \, , \ \forall x, y \in \mathbb{R} \, .$

(b) $ny^{n-1}(x - y) \leq x^n - y^n \leq nx^{n-1}(x - y)$ se $0 < y \leq x$ e $n \in \mathbb{N}$.

5) Seja ϕ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\phi(n) = (-1)^n n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Prove que não existe $\lim_{x\to+\infty} \phi'(x)$.

6) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada crescente e tal que $f(0) = 0$. Mostre que a função definida por $g(x) = f(x)/x$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.

7) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(\cos(ax))}{\log(\cos(bx))}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x - \sin x}{(x\sin x)^{3/2}}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\arcsin(2x) - 2\arcsin(x)}{x^3}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\cot x - 1}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{10^x - 5^x}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2}$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x}{x^2}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} x^{\log(\log x)}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$ (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\frac{x}{x+1}\right)$

(p) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sin(x)\log(x)$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(\cos(1/x) - 1)$ (r) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)}$

(s) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{1/4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (t) $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \log(x)\log(1-x)$ (u) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{(x^x-1)}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{(x^x)} - 1$ (w) $\displaystyle\lim_{x\to0^-} (1-2^x)^{\sin x}$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (\tan x)^{\sin x}$

(y) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^{1/\log x}$ (z) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} [\log(1/x)]^x$

8) Considere a função $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1-x^2} & , \ x \in]-1, 0] \\ \\ x^2 e^{1-x^2} & , \ x \in]0, +\infty[\ . \end{cases}$$

(a) Estude a função f quanto à continuidade.

(b) Determine $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(c) Defina a função f'.

(d) Determine os intervalos de monotonia de f e os pontos em que f tem um extremo local.

9) Supondo que f é uma função de classe C^1 em $[a,b]$, com $a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y| \quad \text{para quaisquer } x, y \in [a,b]\,.$$

10) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$ que satisfaz a desigualdade $f(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = \alpha$.

11) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\sin x)$.

(a) Determine e classifique os extremos locais da função φ.

(b) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

12) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, com derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente e tal que

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty\;.$$

(a) Mostre que existe um único ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) = 0$, e que $m \overset{\text{def}}{=} f(a)$ é o mínimo absoluto de f.

(b) Dado qualquer valor $b \in]m, +\infty[$, mostre que o conjunto $f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : f(x) = b\}$ tem exactamente dois elementos.

V. Representação gráfica de funções.

1) Nas alíneas seguintes, cada função está definida em todos os pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais a fórmula dada para $f(x)$ faz sentido. Em cada caso, determine intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas de f, e esboce o seu gráfico.

(a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$ (c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ (e) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$ (f) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(g) $f(x) = xe^{1/x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{1+\log x}$ (i) $f(x) = x + 2\arctan\dfrac{1}{x}$

2) Considere a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \sqrt{x}\, \log(x), \;\; x > 0\,.$$

(a) Calcule $f(0)$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

3) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = |x| e^{-\,x^2/2}, \;\; x \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

4) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right) & , x \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & , x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade em todo o seu domínio, e quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Determine (justificando) os pontos $x \in \mathbb{R}$ onde f é diferenciável e calcule a sua derivada.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, <u>contínua no ponto 0</u> e tal que

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \neq 0 .$$

(a) Calcule $f(0)$ e estude f quanto à existência de limites quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$.

(b) Obtenha equações para as tangentes ao gráfico de f nos pontos com abcissa $x = 0$ e $x = 1$.

(c) Determine os intervalos de monotonia, extremos, concavidades, inflexões e assímptotas da função f.

(d) Esboce o gráfico de f e indique qual o seu contradomínio.