Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)
1º Sem. 2005/06
4ª Ficha de Exercícios

I. Séries Numéricas

1) Sendo (a_n) uma sucessão de termos positivos, indique justificando a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum(1+a_n)$ (b) $\sum \frac{1}{n^2+a_n}$

2) Sendo (a_n) uma sucessão real tal que $a_n \to +\infty$, indique justificando a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ (b) $\sum \frac{1}{3^n+a_n}$ (c) $\sum \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$

3) Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries convergentes de termos positivos, diga justificando se cada uma das seguintes séries é necessariamente convergente, necessariamente divergente ou se a sua natureza depende das sucessões (a_n) e (b_n).

(a) $\sum a_n^2$ (b) $\sum \left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{b_n}\right)$ (c) $\sum \frac{a_n}{1+b_n}$

4) Determine a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum \frac{n^{1000}}{(1,001)^n}$ (b) $\sum \frac{2^n n}{e^n}$ (c) $\sum \frac{n^3}{3^n}$ (d) $\sum \frac{2^n}{n^3+4}$

(e) $\sum \frac{(1000)^n}{n!}$ (f) $\sum \frac{2^n+n^3}{1+n!}$ (g) $\sum \frac{n!+n^3}{(2n)!}$ (h) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(i) $\sum \frac{n!}{2^{n^2}}$ (j) $\sum \frac{n!}{n^n}$ (k) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$ (l) $\sum \frac{3^n n!}{n^n}$

(m) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (n) $\sum \left(n^{1/n}-1\right)^n$ (o) $\sum e^{-n^2}$ (p) $\sum \left(\frac{1}{n}-e^{-n^2}\right)$

5) Seja (a_n) uma sucessão de termos positivos tal que $\lim n\, a_n = +\infty$. Mostre que a série $\sum a_n$ é divergente.

6) Determine se são absolutamente covergentes, simplesmente convergentes ou divergentes, as seguintes séries:

(a) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ (b) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$ (c) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (d) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(e) $\sum \frac{(-1)^n}{2n^2-1}$ (f) $\sum (-3)^{-n}$ (g) $\sum (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)!}$ (h) $\sum (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2}$

(i) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ (j) $\sum (-1)^n \left(\frac{2n+10}{3n+1}\right)^n$ (k) $\sum \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ (l) $\sum \frac{(-n)^n}{n!}$

7) Mostre que se $a_n > 0$ e $\sum a_n$ converge, então $\sum 1/a_n$ diverge.

8) Mostre que se $\sum |a_n|$ converge então $\sum a_n^2$ também converge. Dê um exemplo em que $\sum a_n^2$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge.

9) Indique, justificando, se são verdadeiras as seguintes proposições.

(a) Se $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum a_n^2/(1+a_n^2)$ também converge absolutamente.

(b) Se $\sum a_n$ converge absolutamente, e se $a_n \neq -1\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sum a_n/(1+a_n)$ também converge absolutamente.

10) Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões tais que a série $\sum (b_n - b_{n+1})$ é convergente e a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Mostre que a série $\sum a_n b_n$ é absolutamente convergente.

11) Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, determine a natureza da série

$$\sum \frac{a^n}{1+b^n}$$

considerando separadamente as seguintes hipóteses.

(a) $0 < a < b$ (b) $0 < b \leq a < 1$ (c) $1 < b \leq a$ (d) $0 < b \leq 1 \leq a$

II. Séries de Potências

1) Para cada uma das seguintes séries de potências, determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ onde a série é (i) absolutamente convergente, (ii) simplesmente convergente e (iii) divergente.

(a) $\sum \frac{x^n}{2^n}$ (b) $\sum \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ (c) $\sum \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$

(d) $\sum \frac{(x-1)^n}{3^n+1}$ (e) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x+1)^n$ (f) $\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

(g) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$ (h) $\sum \frac{2n}{n^2+1}(x+1)^n$ (i) $\sum \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$

(j) $\sum \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}(1-x)^n$ (k) $\sum \frac{(5x+1)^n}{n^2+1}$ (l) $\sum \frac{(1-3x)^{2n}}{4^n(n+1)}$

(m) $\sum \frac{(-1)^n 2^{2n} x^n}{2n}$ (n) $\sum \frac{n!}{n^n}x^n$ (o) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

2) Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

e calcule a sua soma numa das extremidades desse intervalo.

3) Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo a que a série

$$\sum \frac{a^{n+1}}{n+1}x^n$$

seja convergente no ponto $x = -3$ e divergente no ponto $x = 3$.

4) Determine o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}$ para os quais é convergente a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+2x)^n}{n(n+2)2^n}$$

e calcule a sua soma no supremo desse conjunto.

5) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

6) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2-1}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 0$.

7) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^{n-1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = 0$.

8) Seja g a função definida pela fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{4^{n+1}}$$

no conjunto de todos os pontos em que a série é convergente. Determine o domínio da função g e calcule o seu valor no ponto $x = -1$.

9) Designando por R e R' os raios de convergência das séries $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$, indique justificando o raio de convergência da série $\sum (a_n + b_n)x^n$ em cada uma das seguintes hipóteses:

(a) $R = R' = +\infty$.

(b) $R \in \mathbb{R}$ e $R' = +\infty$.

(c) $R, R' \in \mathbb{R}$ e $R < R'$.

O que pode afirmar sobre o raio de convergência de $\sum (a_n + b_n)x^n$ no caso $R = R' \in \mathbb{R}$? Justifique e dê exemplos que ilustrem as situações que podem encontrar-se.

III. Funções Elementares

1) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x$ e $g(x) = x^3$, assinalando de forma conveniente os seus três pontos de intersecção.

2) Esboce os gráficos dos polinómios $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 2x^2 + 4x + 1$, assinalando de forma conveniente os seus dois pontos de intersecção.

3) Seja $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ um polinómio de grau $n \in \mathbb{N}$. Prove cada uma das seguintes proposições.

(a) Se $n \geq 1$ e $f(0) = 0$, então $f(x) = xg(x)$ com g um polinómio de grau $n - 1$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, a função p dada por $p(x) = f(x + a)$ é também um polinómio de grau n.

(c) Se $n \geq 1$ e $f(a) = 0$ para um dado $a \in \mathbb{R}$, então $f(x) = (x - a)h(x)$ com h um polinómio de grau $n - 1$. [Sugestão: considere $p(x) = f(x + a)$.]

(d) Se $f(x) = 0$ para $(n + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $c_k = 0\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $f(x) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) Seja $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq n$. Se $g(x) = f(x)$ para $(m + 1)$ valores distintos de $x \in \mathbb{R}$, então $m = n$, $b_k = c_k\,,\ k = 0, \ldots, n$, e portanto $g(x) = f(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

4) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas.

(a) $p(0) = p(1) = p(2) = 1$ (c) $p(0) = p(1) = 1$
(b) $p(0) = p(1) = 1\,,\ p(2) = 2$ (d) $p(0) = p(1)$

5) Em cada caso, determine todos os polinómios p de grau ≤ 2 satisfazendo as condições dadas para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(a) $p(x) = p(1-x)$ (b) $p(x) = p(1+x)$ (c) $p(2x) = 2p(x)$ (d) $p(3x) = p(x+3)$

6) Considere as seguintes propriedades fundamentais das funções **seno**, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno**, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. $\cos(0) = \sin(\pi/2) = 1$ e $\cos(\pi) = -1$.
2. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\ .$$
3. Para $0 < x < \pi/2$ tem-se que
$$0 < \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}\ .$$

Prove a partir delas as seguintes propriedades importantes das funções seno e coseno. [Sugestão: Apostol, Vol. I, §2.5.]

(a) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sin(0) = \cos(\pi/2) = \sin(\pi) = 0$.

(c) $\sin(-x) = -\sin(x)$ e $\cos(-x) = \cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno é uma função ímpar e o coseno uma função par).

(d) $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ e $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$ (i.e. o seno e o coseno são funções periódicas).

(f) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\begin{aligned} \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\ , \\ \sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\ . \end{aligned}$$

(g) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que
$$\begin{aligned} \sin(a) - \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ , \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\ . \end{aligned}$$

(h) No intervalo $[0, \pi/2]$, o seno é estritamente crescente e o coseno é estritamente decrescente.

7) Com base nas propriedades das funções seno e coseno listadas no exercício anterior, mostre que:

(a) $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \pi/2$ com $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ e $\cos(x+\pi) = -\cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ e $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(e) $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(f) $2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(g) $2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

(h) Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$ tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(h/2)}{h/2}\cos(x+h/2)\ , \\ \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= -\frac{\sin(h/2)}{h/2}\sin(x+h/2)\ . \end{aligned}$$

8) Considere as funções **seno hiperbólico**, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e **coseno hiperbólico**, $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ .$$

Mostre que:

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sinh(0) = 0$ e $\cosh(0) = 1$.

(c) $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ e $\cosh(-x) = \cosh(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(d) para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\ , \\ \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)\ . \end{aligned}$$

(e) $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$ e $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

(f) $\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$ e $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

9) Considere a função inversa da função seno hiperbólico, argsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mostre que

$$\operatorname{argsinh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

10) Considere a função inversa da função coseno hiperbólico, quando esta última é restrita ao intervalo $[0, +\infty[$, argcosh : $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Mostre que

$$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , \ \forall x \in [1, +\infty[\ .$$

11) Determine o domínio das funções definidas pelas seguintes expressões.

(a) $f(x) = \tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$ (b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$ (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(d) $f(x) = \log(\log x)$ (e) $f(x) = \log\left(1 + x^{3/2}\right)$ (f) $f(x) = \log\left(1 - x^{2/3}\right)$

(g) $f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ (h) $f(x) = \log\left(1 + \sqrt{x+1}\right)$ (i) $f(x) = \arcsin\frac{x}{2}$

(j) $f(x) = \arcsin e^x$ (k) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$ (l) $f(x) = \arccos\frac{1}{x}$

(m) $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ (n) $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(o) $f(x) = \log\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (p) $f(x) = \log\left(1 - \arctan x\right)$

12) Seja (u_n) uma sucessão monótona. Prove que a sucessão $(\arctan u_n)$ é convergente em $\mathbb{R}$.

IV. Limites Elementares

1) Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

2) Usando o caso notável

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ,$$

mostre que:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=2$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin x}=5$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x}=2$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{\sin x}=2$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

3) Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\tan t)}{\sin(t)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$ (c) $\displaystyle\lim_{t\to \pi}\frac{\sin(t-\pi)}{t-\pi}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}$

4) Seja $D=[0,+\infty[\setminus\{1\}$ e considere a função $f:D\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}\qquad \text{para}\qquad x\in D\ .$$

(a) Calcule

$$\lim_{x\to +\infty}f(x)\ ,\qquad \lim_{x\to 1^-}f(x)\qquad \text{e}\qquad \lim_{x\to 1^+}f(x)\ .$$

(b) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n) de termos em D tais que

(i) (u_n) é convergente e $(f(u_n))$ é divergente.

(ii) (v_n) é divergente e $(f(v_n))$ é convergente.

5) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & , \ x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & , \ x \geq 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0.

6) Seja f a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}} & , \ x < 0 \\ \log \frac{1}{1+x^2} & , \ x > 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Calcule os limites laterais de f no ponto 0.