Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)
1º Sem. 2005/06

2ª Ficha de Exercícios

I. Axioma de Supremo e Propriedade Arquimediana

1) Dados $a, x, y \in \mathbb{R}$, mostre que se $a \le x \le a + y/n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então $x = a$.

2) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Mostre que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ tal que $a > s - \epsilon$ (i.e. para qualquer $\epsilon > 0$ o conjunto $V_\epsilon(s) \cap A$ é não vazio).

3) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ majorado e não-vazio, com supremo $s = \sup A$. Seja ainda $m \in \mathbb{R}$ um majorante de A distinto de s. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $a < m - \epsilon$ para todo o $a \in A$ (i.e. existe $\epsilon > 0$ tal que o conjunto $V_\epsilon(m) \cap A$ é vazio).

4) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

(a) Prove que se $\sup A < \inf B$ então A e B são disjuntos.

(b) Mostre por meio de exemplos que se $\sup A \ge \inf B$ então A e B podem ser ou não disjuntos.

5) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Considere o subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ definido por

$$C = A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \, x = a + b \text{ com } a \in A\,, \; b \in B\}\,.$$

Mostre que:

(a) Se A e B têm supremo, então C também tem supremo e $\sup C = \sup A + \sup B$.

(b) Se A e B têm ínfimo, então C também tem ínfimo e $\inf C = \inf A + \inf B$.

6) Sejam A e B dois subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$, tais que

$$a \le b\,, \text{ para quaisquer } a \in A \text{ e } b \in B.$$

Mostre que existem o supremo de A e o ínfimo de B, e que $\sup A \le \inf B$.

7) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, limitados e não-vazios, tais que

$$\inf A < \sup B\,.$$

Mostre que existem $a \in A$ e $b \in B$ com $a < b$.

8) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, prove que existe pelo menos um $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$.

9) Dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, prove que existem números inteiros $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $m < a < n$.

10) Dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário, prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < \epsilon$.

11) Dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, prove que existe um único inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq a < m+1$. Este $m \in \mathbb{Z}$ designa-se por **parte inteira** de a e representa-se por $[a]$.

12) Dado $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, prove que existe um único inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq m < a+1$.

13) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, prove que existe pelo menos um número racional $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$. Esta propriedade é designada por **densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$**.

14) Dados $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mostre que $x+y, x-y, xy, x/y\,(y \neq 0), y/x\,(x \neq 0) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

15) A soma ou o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional?

16) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, prove que existe pelo menos um número irracional $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $a < x < b$. Esta propriedade é designada por **densidade de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$**.

17) Um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ diz-se **par** se $n = 2m$ para algum $m \in Z$, e **ímpar** se $n+1$ é par. Demonstre as seguintes proposições.

(a) Um inteiro não pode ser simultaneamente par e ímpar.

(b) Qualquer inteiro ou é par ou é ímpar.

(c) A soma ou o produto de dois inteiros pares é par. O que pode dizer quanto à soma ou produto de dois inteiros ímpares.

(d) Se $n \in \mathbb{Z}$ é ímpar então n^2 também é ímpar. De forma equivalente, se n^2 é par então n também é par.

(e) Se $a^2 = 2b^2$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, então a e b são ambos pares.

(f) Qualquer racional $r \in \mathbb{Q}$ pode ser escrito na forma $r = a/b$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e pelo menos um deles ímpar.

18) Prove que não existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 2$.

19) Mostre que o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ satisfaz a propriedade Arquimediana mas não o Axioma do Supremo.

II. Indução Matemática

1) Demonstre por indução as relações seguintes (entre parentesis, cada relação é escrita usando o símbolo de somatório, cf. exercícios do grupo III).

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$(\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2)$

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$(\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2)$

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$(\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6)$

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$(\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2)$

(e) $0^3 + 1^3 + \cdots + (n-1)^3 < n^4/4 < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
$(\sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 < n^4/4 < \sum_{k=1}^{n} k^3)$

(f) $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{n} > \sqrt{n}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$.
$\left(\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k} > \sqrt{n} \right)$

2) Seja $P(n)$ a proposição: $n^2 + 3n + 1$ é par para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se $P(k)$ é verdadeira para um dado $k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Critique a afirmação: "Por indução fica provado que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$".

(c) Prove que $n^2 + 3n + 1$ é ímpar para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3) Seja $P(n)$ a proposição: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = (2n+1)^2/8$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mostre que se $P(k)$ é verdadeira para um dado $k \in \mathbb{N}$, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Critique a afirmação: "Por indução fica provado que $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$".

(c) Modifique $P(n)$, mudando a igualdade para uma desigualdade que seja verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

4) Mostre a **desigualdade de Bernoulli**, i.e. $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq -1$.

III. Símbolo de Somatório

Dado $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, o símbolo de somatório $\sum_{k=1}^{n} a_k$ define-se por recorrência da seguinte forma:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \quad \text{se } n = 1\,, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n \quad \text{se } n > 1\,.$$

Resolva os exercícios seguintes com base nesta definição.

1) Determine os valores numéricos das seguintes somas:

$$\text{(a)}\ \sum_{i=1}^{8}(2i-3)\ ; \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=1}^{7}(k-4)^2\ ; \qquad \text{(c)}\ \sum_{j=1}^{4} j(j+1)(j+2)\ ; \qquad \text{(d)}\ \sum_{i=1}^{4} 6\ ;$$

$$\text{(e)}\ \sum_{j=1}^{3} j^{2j}\ ; \qquad \text{(f)}\ \sum_{k=1}^{7}(-1)^k(2k-3)\ ; \qquad \text{(g)}\ \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n(n+1)}\ .$$

2) Demonstre as seguintes propriedades do somatório:

(a) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (propriedade aditiva);

(b) $\sum_{k=1}^{n}(c\, a_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$ (homogeneidade);

(c) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$ (propriedade telescópica).

3) Utilizando os resultados do Exercício II.1 e as propriedaes anteriores do somatório, calcule:

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{18}(k+1)\ ; \qquad \text{(b)}\ \sum_{k=1}^{20}(2k-1)^2\ ; \qquad \text{(c)}\ \sum_{k=1}^{15}(k-3)^3\ ;$$

$$\text{(d)}\ \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)\ ; \qquad \text{(e)}\ \sum_{k=1}^{20}\left(3^k - 3^{k+2}\right)\ .$$

4) Dados $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, considere as seguintes duas definições do símbolo $\sum_{k=m+1}^{m+n} a_k$:

$$\text{(i)}\ \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = a_{m+1} \quad \text{se } n = 1\,, \quad \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = \left(\sum_{k=m+1}^{m+n-1} a_k\right) + a_{m+n} \quad \text{se } n > 1\,.$$

$$\text{(ii)}\ \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k+m}\,.$$

Mostre por indução que são equivalentes.

5) Prove por indução que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \ .$$

6) Usando as propriedades do Exercício 2, calcule:

$$\sum_{k=3}^{23} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=8}^{28} \frac{1}{2k-9} \ .$$

7) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

(a) usando indução.

(b) observando que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ e usando as propriedades do Exercício 2.

8) Mostre que para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}$ com $r \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

pelos seguintes dois métodos distintos:

(a) usando indução.

(b) aplicando as propriedades do Exercício 2 a $(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k$.

A que é igual a soma quando $r = 1$?
<u>Nota</u>: por definição, $r^0 = 1$.

9) O símbolo $n!$, designado por n**-factorial**, define-se por recorrência da seguinte forma:

$$0! = 1 \qquad \text{e} \qquad n! = n \cdot (n-1)! \,, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N} \,.$$

Observe que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. Dados inteiros $0 \leq k \leq n$, o **coeficiente binomial** $\binom{n}{k}$ (às vezes também representado por C_k^n) é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \,.$$

(a) Mostre que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{e} \qquad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Esta última fórmula é a chamada **lei do triângulo de Pascal**, permitindo o cálculo rápido dos sucessivos coeficientes binomiais.

(b) Prove por indução a **fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \text{ para quaisquer } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } n \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Use a fórmula anterior para estabelecer as igualdades

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0, \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}_0.$$

IV. Sucessões Reais

1) Determine, se existirem, os limites das seguintes sucessões.

(a) $x_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$ (b) $x_n = \dfrac{2n+3}{3n+(-1)^n}$ (c) $x_n = n - \dfrac{n^2}{n+2}$ (d) $x_n = \dfrac{n+\cos(n)}{2n-1}$

(e) $x_n = \dfrac{n^2-2}{5n^2}$ (f) $x_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$ (g) $x_n = \sqrt{n} - \dfrac{n}{\sqrt{n}+2}$ (h) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^4-1}}{n^2+3}$

(i) $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{1+n^2}$ (j) $x_n = \dfrac{n^2-1}{\sqrt{3n^4+3}}$ (k) $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$ (l) $x_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n}$

(m) $x_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n}$ (n) $x_n = \dfrac{1+n^3}{n^2+2n+1}$ (o) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(p) $x_n = \sqrt{n(n+1)} - \sqrt{n(n-1)}$ (q) $x_n = n\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

(r) $x_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n+3}$ (s) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}}{n+1}$

(t) $x_n = a^n$, com $a \in \mathbb{R}$ (u) $x_n = \dfrac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$ (v) $x_n = \dfrac{2^{2n}-3^n}{2^n-3^{2n}}$ (x) $x_n = \dfrac{(3^n)^2}{1+7^n}$

2) Cada uma das sucessões (x_n) das alíneas seguintes é convergente. Portanto, para qualquer $\epsilon > 0$ previamente dado, existe um natural $N \in \mathbb{N}$ dependendo de ϵ, tal que $|a_n - L| < \epsilon$ para todo o $n \geq N$, onde $L = \lim_{n\to\infty} x_n$. Determine em cada alínea o valor N adequado a cada um dos seguintes valores de ϵ : 1, 0.1, 0.01, 0.001.

$$\text{(a) } x_n = \frac{1}{n} \qquad \text{(b) } x_n = \frac{n}{n+1} \qquad \text{(c) } x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\text{(d) } x_n = \frac{1}{n!} \qquad \text{(e) } x_n = \frac{2n}{n^3+1} \qquad \text{(f) } x_n = (-1)^n \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

3) Sendo (u_n) e (v_n) sucessões convergentes tais que

$$u_n \leq v_n \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,,$$

prove que $\lim u_n \leq \lim v_n$.

4) Sendo (u_n) e (v_n) sucessões de termos positivos tais que

$$1 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,,$$

prove que (u_n) converge sse (v_n) converge. Mostre também que, quando existem, os seus limites são iguais.

5) Use a definição de limite para provar que se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ então $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$ e $\lim_{n\to\infty} c \cdot x_n = c \cdot a$ para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$.

6) Use a definição de limite para provar que se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ então $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = 0$.

7) Use os dois exercícios anteriores para provar que se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ então $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

8) Use os exercícios anteriores e a identidade

$$2x_n y_n = (x_n + y_n)^2 - x_n^2 - y_n^2$$

para provar que se $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ então $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

9) Seja (u_n) uma sucessão de números reais. Indique, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras.

(a) Se o conjunto dos termos da sucessão não tem máximo nem mínimo, a sucessão é divergente.

(b) Se $u_n \to 0$ e $u_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então (u_n) é decrescente.

V. Diversos

1) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio e majorado, com supremo $s \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma sucessão (x_n) de termos em X convergente para s.

2) Seja $x \in \mathbb{R}$ um número irracional. Mostre que existe uma sucessão (r_n) de números racionais convergente para x.

3) Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$ são válidas as desigualdades

$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) .$$

Use-as para provar que

$$2\sqrt{m+1}-2 < \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{m}$$

para todo o $m \in \mathbb{N}$. O que pode concluir sobre o limite da sucessão (x_m) definida para todo o $m \in \mathbb{N}$ por

$$x_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} \ ?$$

4) Dado um número real $r \in \mathbb{R}$, considere a sucessão (x_n) definida para todo o $n \in \mathbb{N}$ por

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} r^k .$$

Use os resultados do Exercício III.8 e da alínea (t) do Exercício IV.1, para mostrar que (x_n) é convergente sse $|r| < 1$, sendo neste caso o seu limite igual a $1/(1-r)$.

5) Usando a desigualdade triangular ($|x+y| \leq |x| + |y|$) e o método de indução, mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ é válida a desigualdade

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| .$$

6) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer números reais $a, b \in \mathbb{R}$ é válida a igualdade

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} .$$