Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA I (LEIC-Tagus, LERCI, LEGI e LEE)

1º Sem. 2005/06

1ª Ficha de Exercícios

1) Usando apenas as propriedades dos números reais especificadas pelos seus cinco **Axiomas de Corpo** (i.e. comutatividade e associatividade de $+$ e $\cdot$, distributividade, existência de elementos neutros (0 e 1), simétricos e inversos), demonstre as seguintes proposições.

(a) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a + b = a + c$ então $b = c$ (*lei do corte para a adição*).

(b) O elemento neutro da adição é único.

(c) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ existe um e um só $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = b$. Este número x é designado por *diferença* entre b e a, e representa-se por $b - a$.

(d) $-0 = 0$ e $-(-a) = a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(e) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tem-se que $-(a + b) = -a - b$, $-(a - b) = -a + b$ e $(a - b) + (b - c) = a - c$.

(f) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tem-se que $a(b - c) = ab - ac$.

(g) Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se que $0a = a0 = 0$ (*zero é elemento absorvente da multiplicação*).

(h) Zero não tem inverso.

(i) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \neq 0$ e $ab = ac$ então $b = c$ (*lei do corte para a multiplicação*).

(j) O elemento neutro da multiplicação é único.

(k) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, existe um e um só $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax = b$. Este número x é designado por *quociente* de b por a, e representa-se por b/a.

(l) $1^{-1} = 1$ e $(a^{-1})^{-1} = a$ para qualquer número real $a \neq 0$.

(m) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

(n) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tem-se que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

(o) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que $(-a)b = -(ab)$ e $(-a)(-b) = ab$.

(p) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, tem-se que $-(a/b) = (-a)/b = a/(-b)$.

(q) Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, tem-se que $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$ e $a/b - c/d = (ad - bc)/bd$.

(r) Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ e $d \neq 0$, tem-se que $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$.

(s) Para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$, $c \neq 0$ e $d \neq 0$, tem-se que $(a/b)/(c/d) = (ad)/(bc)$.

2) Usando agora também as propriedades dos números reais especificadas pelos seus **Axiomas de Ordem** (i.e. $\mathbb{R}^+$ é fechado para as operações $+$ e $\cdot$, e tricotomia), demonstre as seguintes proposições.

(a) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, verifica-se uma e uma só das seguintes três relações: $a < b$, $a = b$ e $a > b$ (versão alternativa da *tricotomia*).

(b) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$ (*propriedade transitiva*).

(c) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ então $a + c < b + c$.

(d) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $c > 0$ então $ac < bc$.

(e) Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a < b$ e $c < 0$ então $ac > bc$.

(f) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, se $a < b$ então $-a > -b$. Em particular, se $a < 0$ então $-a > 0$.

(g) $1 > 0$ e $a^2 > 0$ para qualquer número real $a \neq 0$.

(h) Não existe qualquer $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 + 1 = 0$.

(i) Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^-$ tem-se que $a + b \in \mathbb{R}^-$.

(j) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ e $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$ para qualquer número real $a \neq 0$.

(k) Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $0 < a < b$, então $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

(l) Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $ab > 0$ então a e b são ambos positivos ou ambos negativos.

(m) Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $a < c$ e $b < d$, então $a + b < c + d$.

(n) Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq c$ e $b < d$, então $a + b < c + d$.

(o) Se $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são tais que $a \leq c$ e $b \leq d$, então $a + b \leq c + d$.

(p) Não existe nenhum número real $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(q) Se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 \leq a < h$ para qualquer $h \in \mathbb{R}^+$, então $a = 0$.

3) Usando apenas a definição da função **módulo** (ou *valor absoluto*), i.e. para qualquer número real $a \in \mathbb{R}$

$$|a| = \begin{cases} a & , \text{ se } a \geq 0 \\ \\ -a & , \text{ se } a < 0 \ , \end{cases}$$

a **desigualdade triangular**, i.e. $|a + b| \leq |a| + |b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, e as propriedades dos números reais determinadas pelos seus Axiomas e exercícios anteriores, demonstre as seguintes proposições.

(a) Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se que $|a| = 0$ se e só se $a = 0$.

(b) $|-a| = |a|$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(c) $|a - b| = |b - a|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

(d) $|a|^2 = a^2$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(e) $|ab| = |a||b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

(f) $|a/b| = |a|/|b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$.

(g) $|a - b| \leq |a| + |b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

(h) $|a| - |b| \leq |a - b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$.

4) Mostre que:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| = 3\} = \{-5, 1\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \leq 1\} = [-3, -1]$

(c) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - x| > 2\} =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$

(d) $\{x \in \mathbb{R} : |3 - 2x| \geq |x + 2|\} =]-\infty, 1/3] \cup [5, +\infty[$

(e) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x - 2|\} = \{1\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq |x - 2|\} =]-\infty, 1]$

(g) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| = 2|x|\} = \{-3, 1\}$

(h) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2|x|\} =]-3, 1[$

(i) $\{x \in \mathbb{R} : 2 < |x| < 3\} =]-3, -2[\cup]2, 3[$

(j) $\{x \in \mathbb{R} : 4 < x^2 < 9\} =]-3, -2[\cup]2, 3[$

(k) $\{x \in \mathbb{R} : 3 < |x-1| \leq 5\} = [-4, -2[\cup]4, 6]$

(l) $\{x \in \mathbb{R} : 9 \leq (x-1)^2 < 25\} =]-4, -2] \cup [4, 6[$

(m) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x-3| > 2 \ \wedge\ x \geq 0\} = [0, 1[\cup]5, +\infty[$

(n) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x+2| \leq 3 \ \wedge\ x+1 > 0\} =]-1, 1]$

(o) $\{x \in \mathbb{R} :\ x/(x-2) \leq 0\} = [0, 2[$

(p) $\{x \in \mathbb{R} : (1-x)/(2x+3) > 0\} =]-3/2, 1[$

(q) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 1 > 0 \ \wedge\ x - 3 \leq 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, 3]$

(r) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 4 \leq 0 \ \wedge\ x + 1 > 0\} =]-1, 2]$

(s) $\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 - 2x - 3 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

(t) $\{x \in \mathbb{R} : 2 - x - x^2 > 0\} =]-2, 1[$

(u) $\{x \in \mathbb{R} : (x-2)/(x+2) < (x+3)/(x-3)\} =]-2, 0[\cup]3, +\infty[$

(v) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x^2 - 2| \leq 1\} = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

(w) $\{x \in \mathbb{R} :\ |3 - 2x + x^2| = 5\} = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

(x) $\{x \in \mathbb{R} :\ |3 - 2x + x^2| < 5\} =]1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}[$

(y) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x^2 - 2x - 15| \geq 9\} =]-\infty, -4] \cup [1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}] \cup [6, +\infty[$

(z) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x(x-3)| = |1 - 3x|\} = \{-1, 3 - 2\sqrt{2}, 1, 3 + 2\sqrt{2}\}$

(ω) $\{x \in \mathbb{R} :\ |x(x-3)| > |1 - 3x|\} =]-\infty, -1[\cup]3 - 2\sqrt{2}, 1[\cup]3 + 2\sqrt{2}, +\infty[$

5) Determine caso existam, ou justifique que não existem, o conjunto dos **minorantes**, o conjunto dos **majorantes**, o **supremo**, o **ínfimo**, o **máximo** e o **mínimo** de todos os conjuntos indicados no exercício anterior.