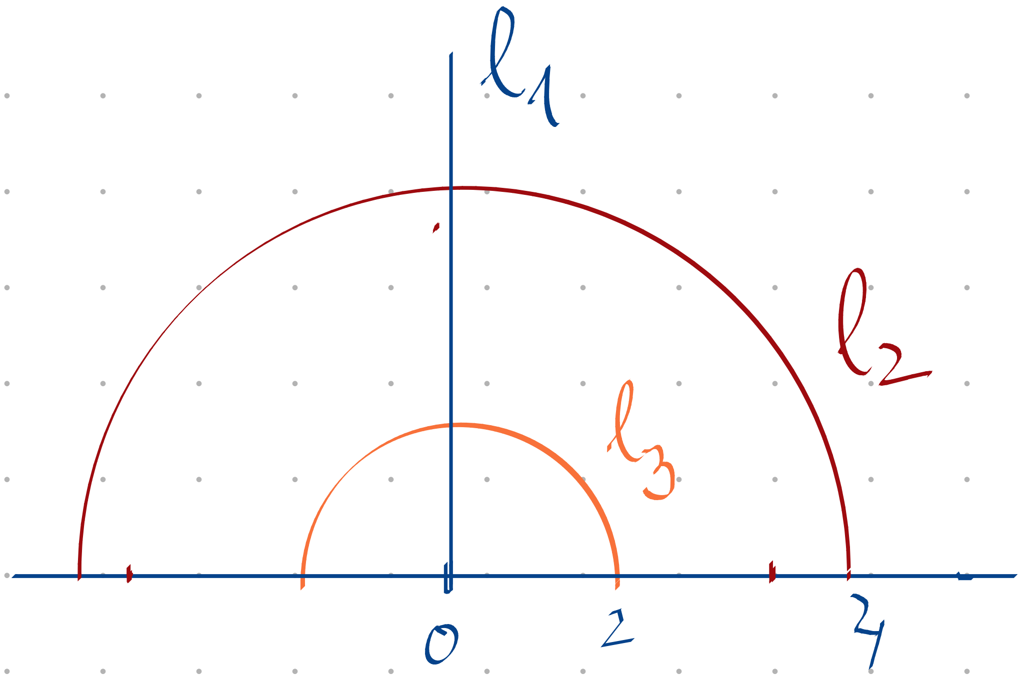
Teste 4

17/12/2020



1) a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$

f leva rectas hiperbolicas em rectas hiperbolicas pelo que basta ver $f(0)$ e $f(\infty)$

Como $f(0) = -1$ e $f(\infty) = 1$

$f(l_1)$ é a recta hiperbolica que "une" -1 a 1 ou seja a recta hip. de eq.

$$|z| = 1$$

b) i) f é uma isometria inversa

Pts fixos:

$$\frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = z \iff \bar{z}+1 = |z|^2 - z$$

$$\iff |z|^2 - z - \bar{z} - 1 = 0$$

$$\iff |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z - 1 = 0$$

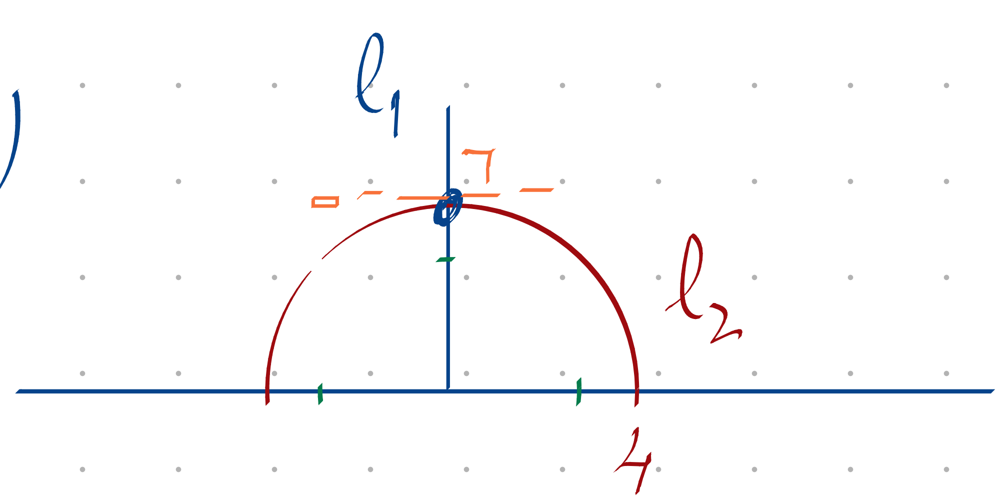
$$\underset{z = x+yi}{\iff} x^2+y^2-2x-1=0$$

$$(x-1)^2+y^2 = 2$$

f é a reflexão hiperbólica na reta hiperbólica de equação

$$|z-1| = \sqrt{2}$$

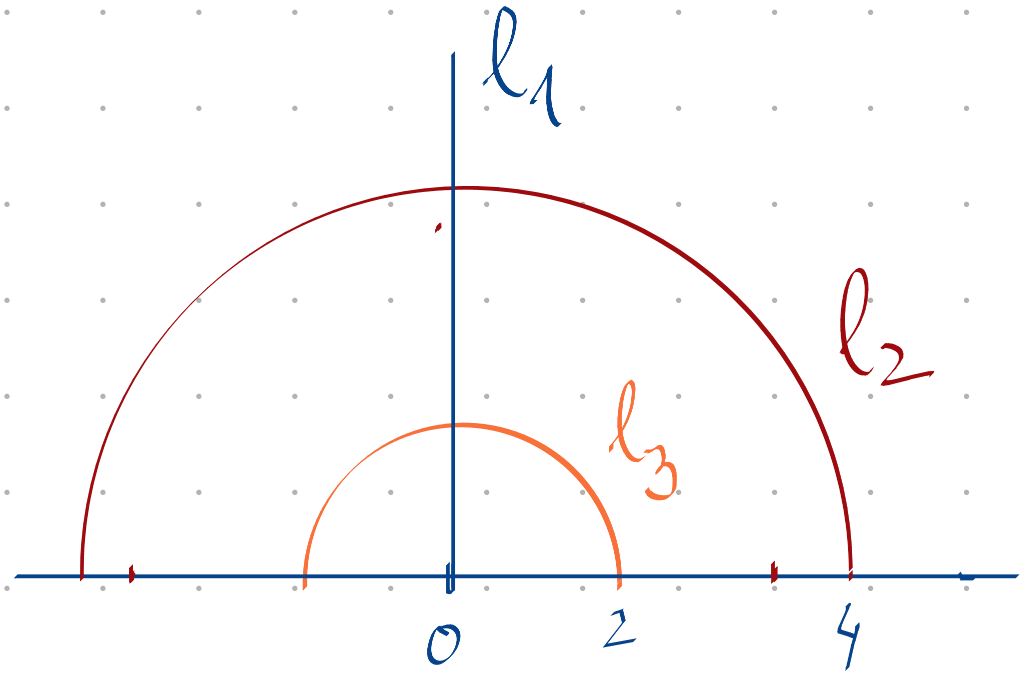
ii)



$l_1 \cap l_2 = \{4i\}$

$R_{l_2} \circ R_{l_1}$ – rotação hiperbólica de centro $4i$ e $\measuredangle\ \pi$ (meia volta)

iii) $R_{l_3} \circ R_{l_2}$

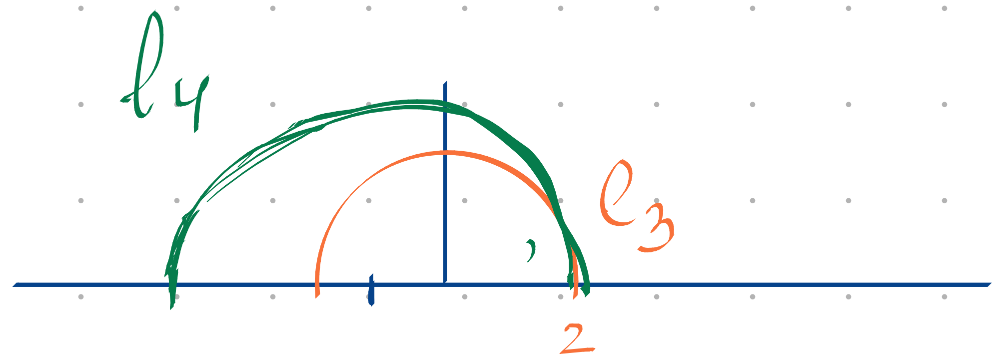


l_2 e l_3 são ultraparalelas

$\Rightarrow$ $R_{l_3} \circ R_{l_2}$ é uma translação hip. ao longo da única recta hiperbólica perpendicular a l_2 e l_3, ou seja a recta l_1

$R_{l_3} \circ R_{l_2}$ é uma translação hiperbólica ao longo de l_1

IV) $R_{l_4} \circ R_{l_3}$

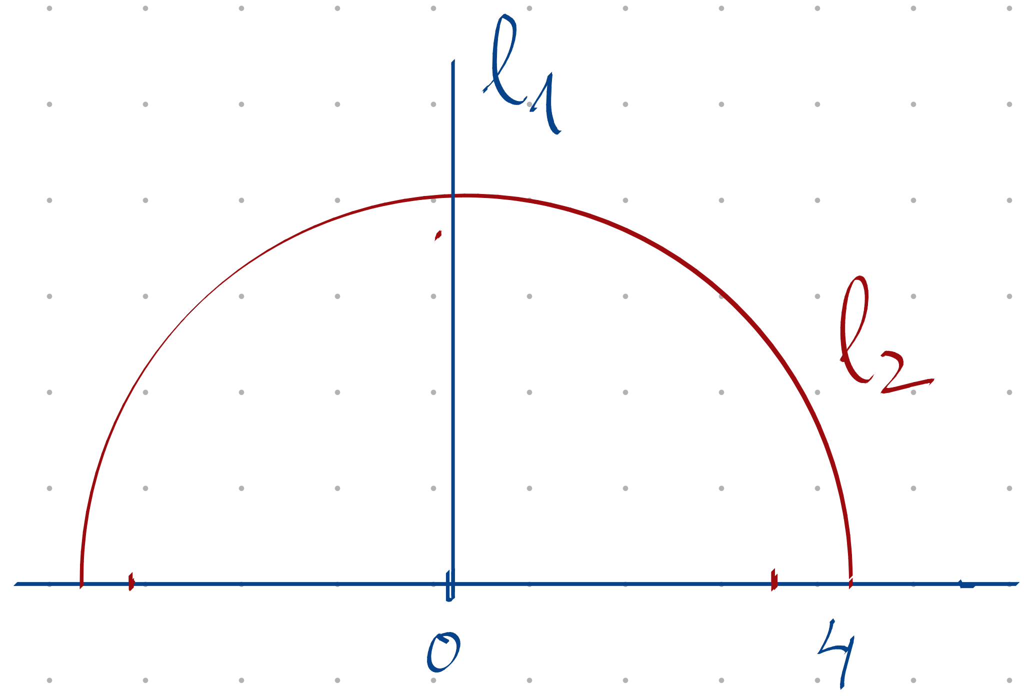


$l_4 \cap l_3 = \{2\}$ $\quad$ l_3 e l_4 são paralelas

$R_{l_4} \circ R_{l_3}$ é uma rotação limite em torno de 2

V) $\underbrace{R_{l_3} \circ R_{l_2}}_{\text{Transl. hip ao longo de } l_1} \circ R_{l_1}$ — reflexão com deslize ao longo de l_1

c)



$l_4 \cap \overline{\mathbb{R}} = \{2, -4\}$

$R_{l_2}(z) = \dfrac{16}{\bar{z}}$ → inversão na circ. de centro 0 e raio 4

$$\left.\begin{aligned} R_{l_2}(2) &= 8 \\ R_{l_2}(-4) &= -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_{l_2}(l_4) \text{ é a}$$

recta hip. que "passa" em -4 e 8

ou seja a recta hip. de eq.

$$|z-2| = 6$$

d) $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ isometria

$h(\ell_2) = \ell_3$

$h(\ell_4) = \ell_4$

$h(\ell_4) = \ell_4 \Rightarrow h(\{2, -4\}) = \{2, -4\}$

$h(\ell_2) = \ell_3 \Rightarrow h(\{-4, 4\}) = \{-2, 2\}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} h(-4) = 2 \\ h(2) = -4 \\ h(4) = -2 \end{array}$$

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ou

$$h(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

- $h(-4) = \dfrac{-4a+b}{-4c+d} = 2$

- $h(2) = \dfrac{2a+b}{2c+d} = -4$

- $h(4) = \dfrac{4a+b}{4c+d} = -2$

$$\begin{cases} -4a+b = -8c+2d \\ 2a+b = -8c-4d \\ 4a+b = -8c-2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a+b=-8c+2d \\ 2a+b=-8c-4d \\ 4a+b=-8c-2d \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{cccc|c} -4 & 1 & 8 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 24 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad d=0$$

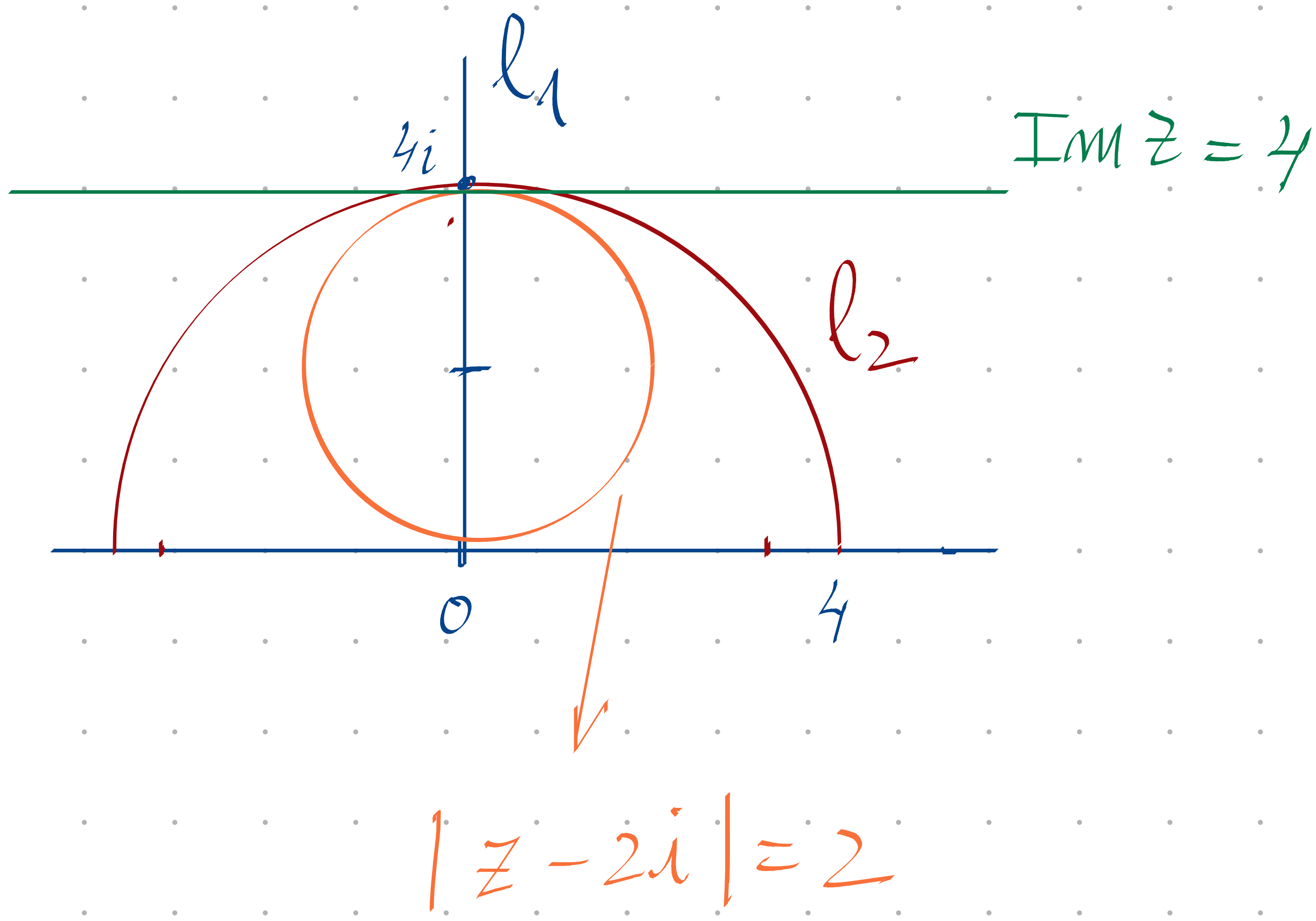
$$b+8c=0$$

$$2a=0$$

$$h(z)=-\frac{8}{z}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det = 8$$

e)



f) • $f(z) = \dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}+1}$ • h - isometria direta

reflexão na reta hip. m: $|z-1|=\sqrt{2}$

se considerarmos

$g : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ isometria t.q. $g(m) = \ell_1$

eixo imaginário

então

$$g \circ f \circ g^{-1} = R_{\ell_1}.$$

e

$\varphi = g \circ h \circ g^{-1}$ é uma isometria direta.

Então
$$R_{l_1} \circ \varphi = \varphi \circ R_{l_1}$$

$$\Leftrightarrow g \circ f \circ \cancel{g^{-1}} \circ \cancel{g} \circ h \circ g^{-1}$$

$$= g \circ h \circ \cancel{g^{-1}} \cancel{g} \circ f \circ g^{-1}$$

$$\Leftrightarrow g \circ f \circ h \circ g^{-1} = g \circ h \circ f \circ g^{-1}$$

$$\Leftrightarrow f \circ h = h \circ f$$

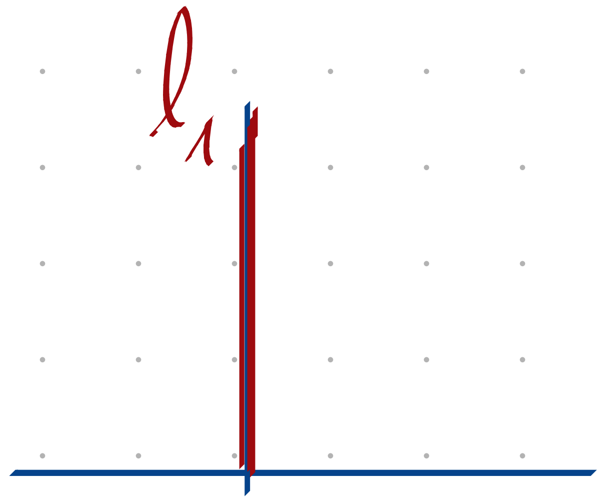
i.e. $R_{l_1} \circ \varphi = \varphi \circ R_l \Leftrightarrow f \circ h = h \circ f$

ou seja R_{l_1} e φ comutam sse

f e h comutam

Vejamos então quais as isometrias directas φ que comutam com a reflexão R_l

$R_{l_1}(z) = -\bar{z}$



$\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ isometria directa

$\Rightarrow a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$ad - bc > 0$

$R_{l_1} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- $R_{l_1} \circ h$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$ ✓

- $h \circ R_{l_1}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$

i.e. $(R_{l_1} \circ \varphi)(z) = \dfrac{-a\bar{z} - b}{c\bar{z} + d}$

$(\varphi \circ R_{l_1})(z) = \dfrac{-a\bar{z} + b}{-c\bar{z} + d}$

Então $R_{l_1} \circ \varphi = \varphi \circ R_{l_1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ i) • se $a \neq 0$ ou $d \neq 0 \Rightarrow k = 1$ e $b = c = 0$

ii) • se $a = 0 \wedge d = 0$ então $k = -1$

i) $\varphi(z) = \dfrac{a}{d} z = \lambda z$ com $\lambda > 0$

translação hiperbólica ao longo de ℓ_1
(fixa os ptos 0 e ∞)

ii) $\varphi(z) = \dfrac{\lambda}{z}$, $\lambda < 0$

ptos fixos: $z^2 = \lambda \Rightarrow z = \pm\sqrt{-\lambda}\, i$

Um único pto fixo em $\mathbb{H}$: $\sqrt{-\lambda}\, i$

$\Rightarrow \varphi$ é uma rotação em torno de $\sqrt{-\lambda}\, i$

Como $(\varphi \circ \varphi)(z) = z$ conclui-se que
φ é uma meia volta em torno dum pto de ℓ_1.

Conclui-se assim que as isometrias diretas que comutam com R_{l_1} são as meias voltas em torno de pts de l_1 e as translações hiperbólicas ao longo de l_1.

Então as isometrias diretas

$$h = g^{-1} \circ \varphi \circ g$$

que comutam com R_m são as translações hiperbólicas ao longo de m e as meias-volta em torno de pts de m.