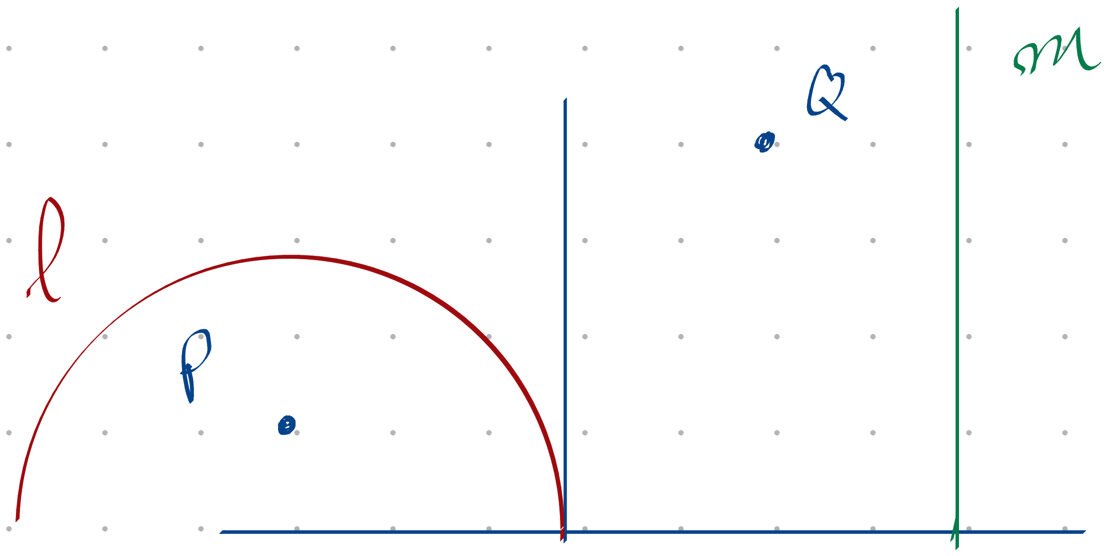
Teste 4

10/12/2020



a) $\delta_{\mathbb{H}}(P,Q) = \dfrac{|-3+i-(2+4i)|}{|-3+i-(2-4i)|} =$

$$= \frac{|-5-3i|}{|-5+5i|} = \sqrt{\frac{34}{50}} = \frac{\sqrt{17}}{5}$$

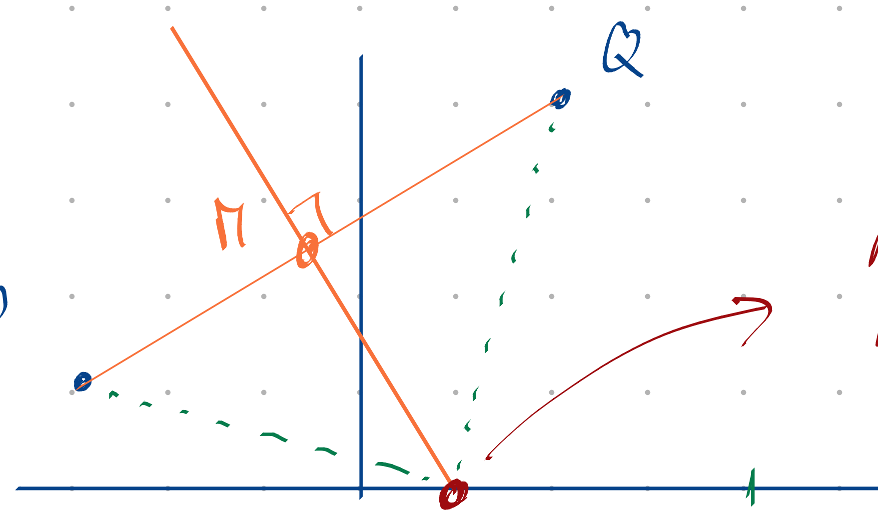
$$d_{\mathbb{H}}(P,Q) = 2\,\operatorname{arctgh}\left(\frac{\sqrt{17}}{5}\right)$$

b)

$P \to (-3,1)$

$Q \to (2,4)$

$M \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$



$\begin{cases} 5x+3y=5 \\ y=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=1$

$\Downarrow$

recta que passa em P e Q:

$|z-1| = |-3+i-1|$

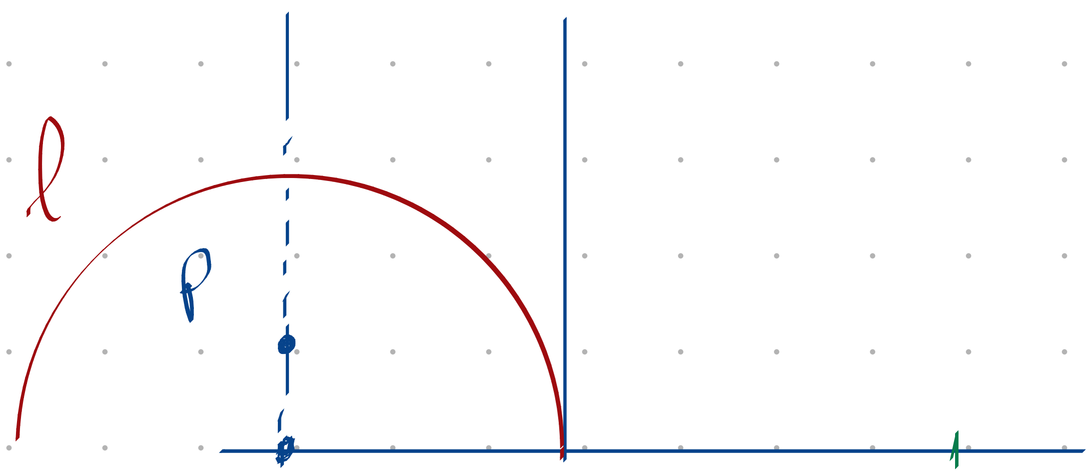
$|z-1| = \sqrt{17}$

$\vec{PQ} = (5,3)$

$\Rightarrow$ mediatriz:

$5x+3y = -\frac{5}{2}+\frac{15}{2} = 5$

c)



R_ℓ – inversão em ℓ $\qquad \ell: |z+3|=3$

$$\underbrace{|P+3|}_{1}\,|R_\ell(z)+3| = 9$$

$$|R_\ell(z)+3| = 9$$

Como $R_\ell(z)$ está na recta euclidiana que passa em -3 e P temos que

$$R_\ell(z) = -3 + ki \,, \quad k>0$$

pelo que $k = 9$

Assim,

$$R_\ell(z) = -3+9i$$

Alternativamente podemos encontrar a expressão de R_ℓ:

$$|z+3| = 3 \Leftrightarrow |z+3|^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (z+3)(\bar{z}+3) = 9$$

$$\Leftrightarrow z+3 = \frac{9}{\bar{z}+3}$$

$$\Leftrightarrow z = -3 + \frac{9}{\bar{z}+3} = \frac{-3\bar{z}}{\bar{z}+3}$$

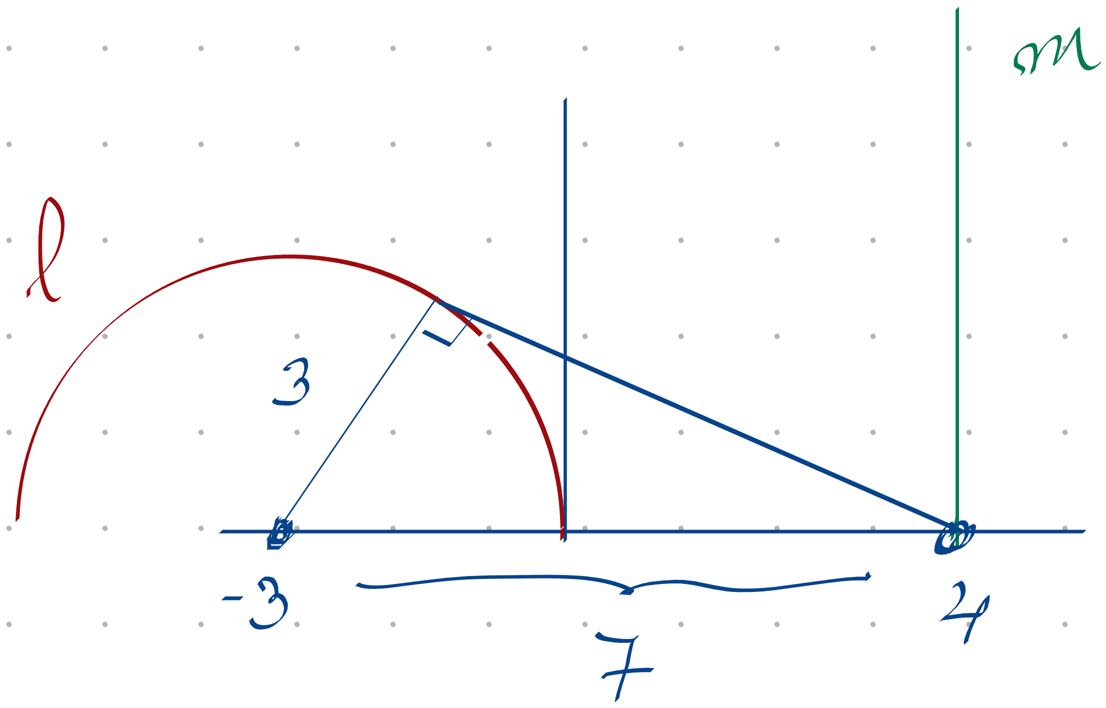
pelo que

$$R_\ell(z) = \frac{-3\bar{z}}{\bar{z}+3}.$$

$$\Rightarrow R_\ell(p) = \frac{-3(-3-i)}{\cancel{-3}-i+\cancel{3}} = 3(3+i)i =$$

$$= -3+9i$$

c)



n - recta tip. $\perp$ a l e m

$\Rightarrow$ circ. de centro em 4 e raio r

onde

$$9 + r^2 = 49$$

$$r^2 = 40 \Rightarrow r = \sqrt{40}$$

n: $|z-4| = \sqrt{40}$

Alternativamente:

$$R_\ell(z) = \frac{-3\bar{z}}{\bar{z}+3} \qquad R_m(z) = -\bar{z}+8$$

$$(R_m \circ R_\ell)(z) = \frac{11z+24}{z+3}$$ é uma translação hiperbólica ao longo de n

Ptos fixos estão em n $\Leftarrow$

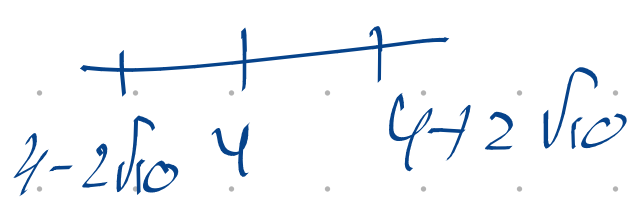
Ptos fixos:

$$\frac{11z+24}{z+3} = z \iff 11z+24 = z^2+3z$$

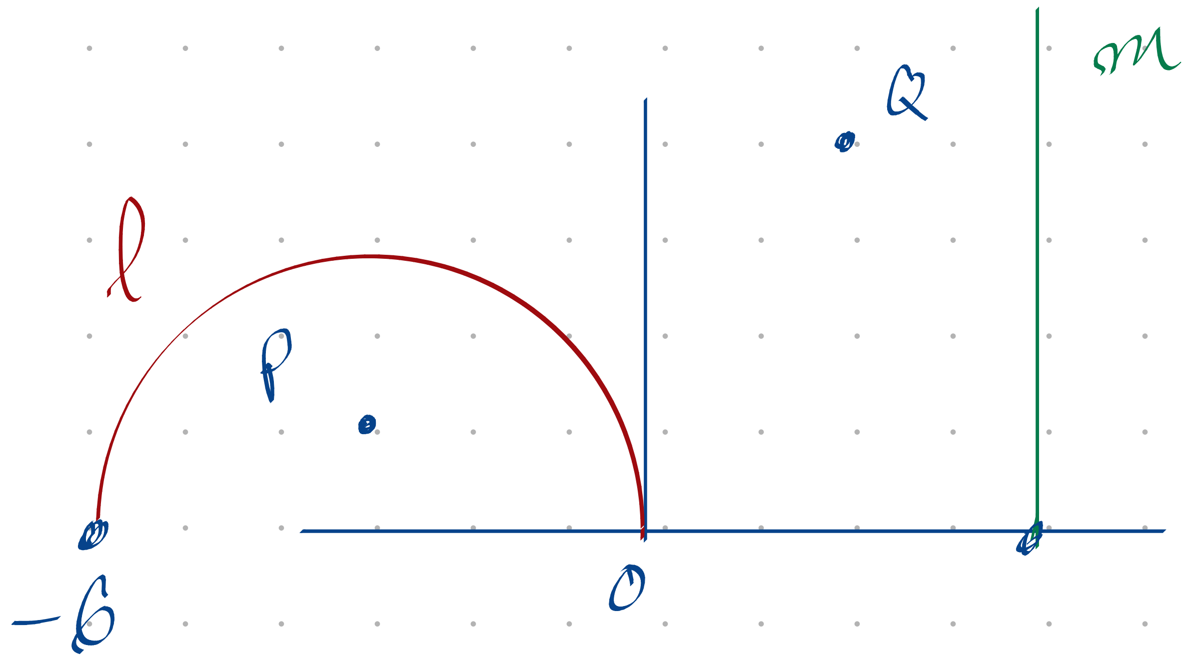
$$\iff z^2-8z-24=0 \iff z = 4 \pm 2\sqrt{10}$$

$\Rightarrow$ n tem equação

$$|z-4| = 2\sqrt{10}$$



e)



$$h(l) = m \Rightarrow h(0) \in \{4, \infty\}$$
$$h(-6) \in \{4, \infty\}$$

Por exemplo: $h(0) = 4$
$h(-6) = \infty$

$$h(z) = \frac{az+b}{z+6} \Rightarrow h(0) = \frac{b}{6} = 4 \Rightarrow b = 24$$

$$h(z) = \frac{az+24}{z+6}$$

$$\det\begin{pmatrix} a & 24 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 6a - 24 > 0$$
$$\Rightarrow a > 4$$

por ex. $a = 5$

$$h(z) = \frac{5z+24}{z+6}$$

classificação: $h(z) = \dfrac{5z+24}{z+6}$

Ptos fixos: $\dfrac{5z+24}{z+6} = z$

$\Leftrightarrow \quad 5z+24 = z^2+6z$

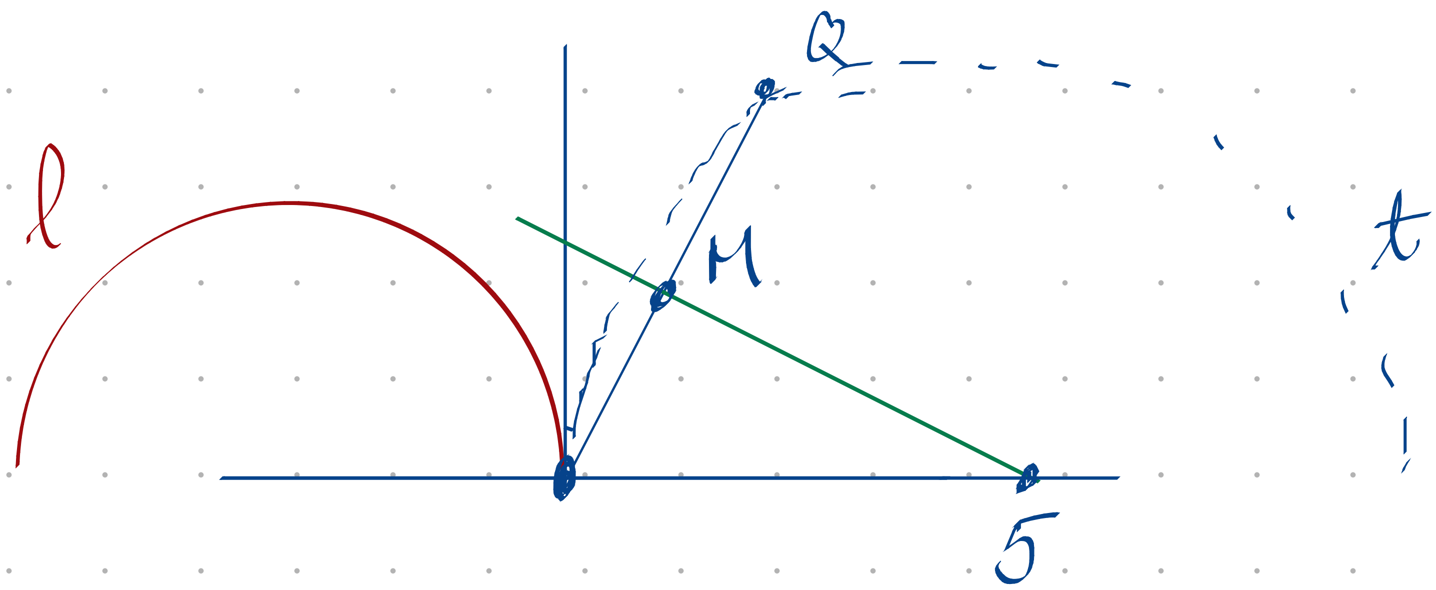
$\Leftrightarrow \quad z^2+z-24=0$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{97}}{2}$

$\Rightarrow$ h é uma translação hiperbólica ao longo da recta hiperbólica de equação

$$\left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{97}}{2}$$

f)



t - recta hiperbólica que passa em P e é paralela (e não ultraparalela) a ℓ

$\Rightarrow t \cap \{-6, 0\} \neq \emptyset$

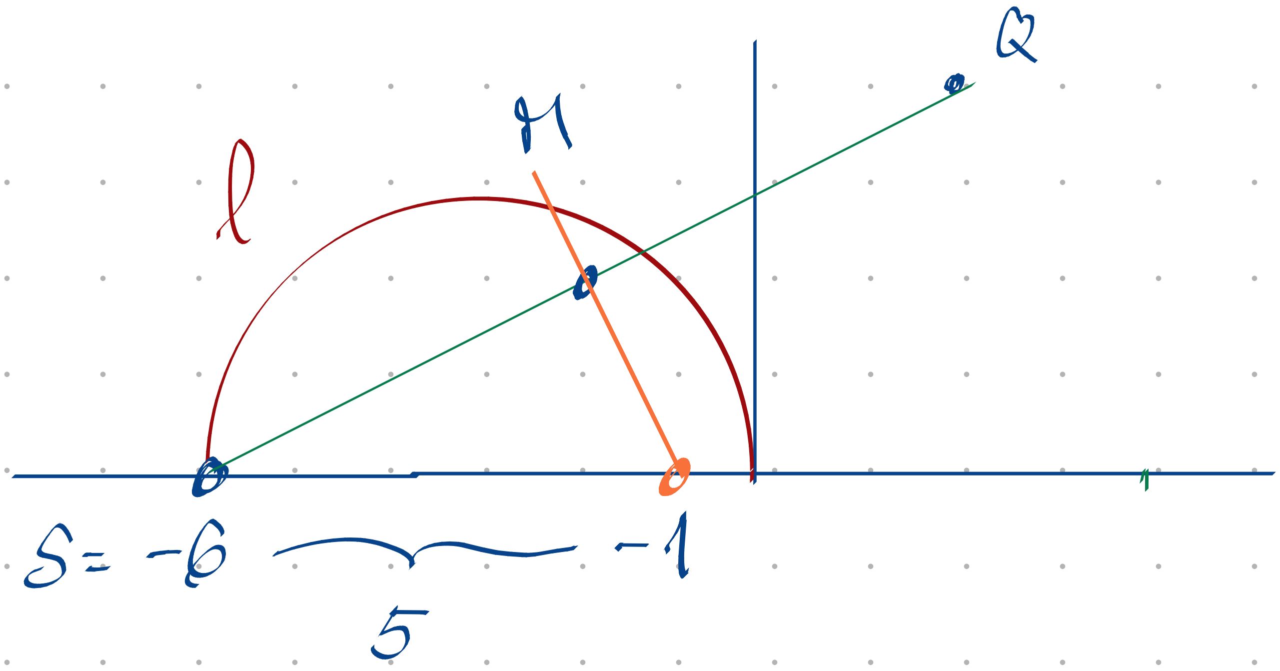
2 hipóteses: $Q \to (2,4)$

① mediatriz de $[OQ]$ $\qquad \vec{OQ} = (2,4) = 2(1,2)$

$x + 2y = 1 + 4 = 5$ $\qquad M \to (1,2)$

A mediatriz intersecta o eixo real no pto $x = 5$ pelo que t tem equação

$|z - 5| = 5 \leftarrow$ (t passa na origem)



② $S \to (-6,0)$

$Q \to (2,4)$

$\vec{SQ} = (8,4) = 4(2,1)$

$M = (-2,2)$

mediatriz:

$2x + y = -4 + 2 = -2$

$\boxed{2x + y = -2}$

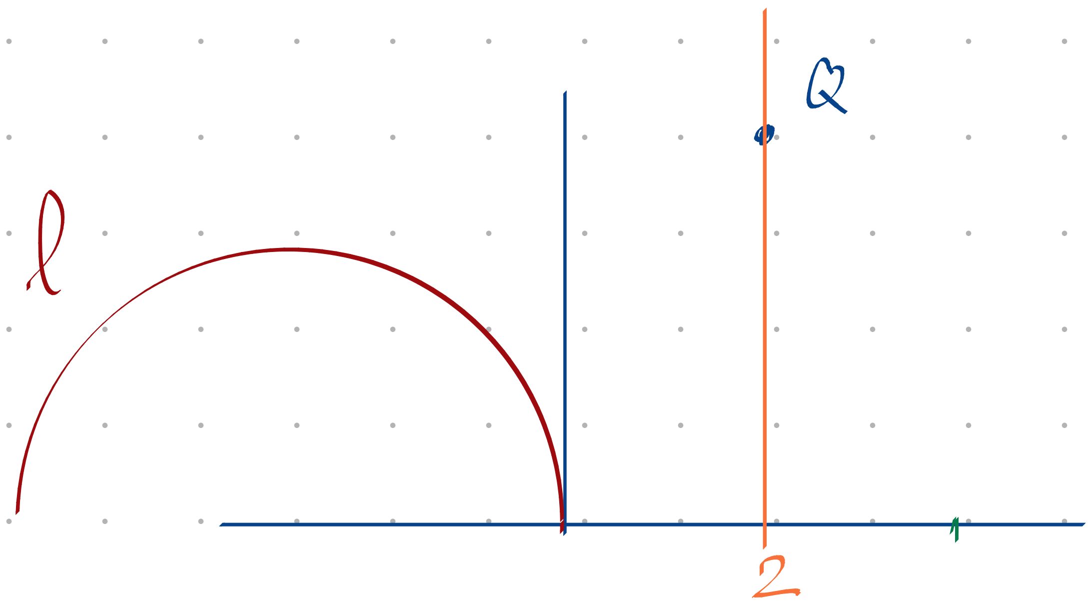
Intersecção com o eixo real:

$x = -1$

A tem equação

$|z+1| = 5$

g)



Por exemplo a recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z = 2$

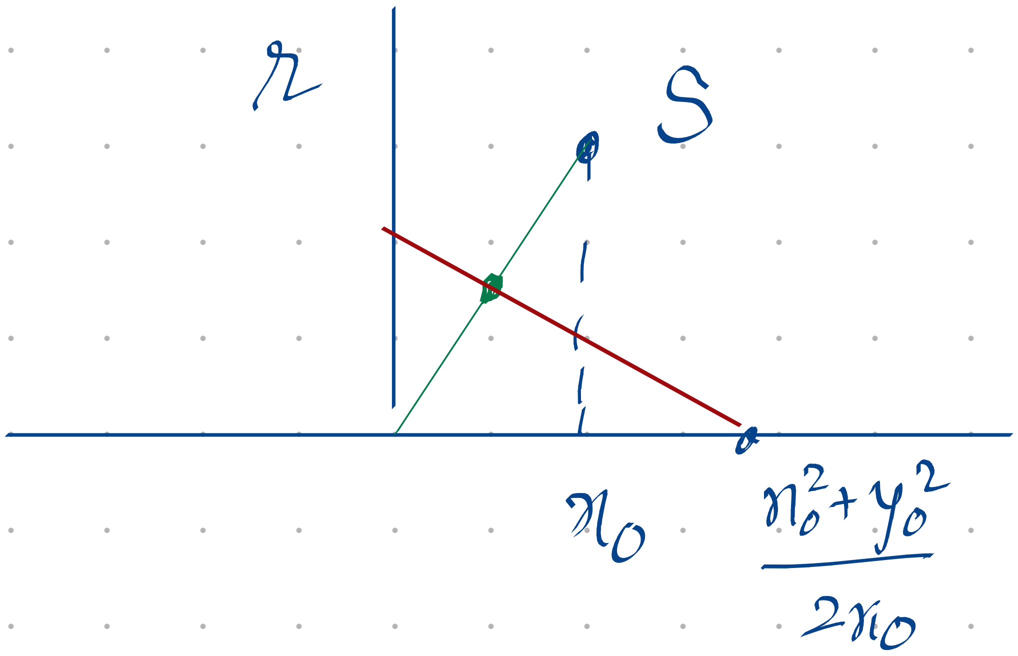
(não intersecta ℓ nem em $\mathbb{H}$ nem em $\overline{\mathbb{R}}$)

2. Usando uma isometria se necessário podemos supor que r é a recta hiperbólica de equação $\operatorname{Re} z = 0$

Então $r \cap \overline{\mathbb{R}} = \{0, \infty\}$

Como $S \notin r$ temos $S = x_0 + y_0 i$

com $x_0 \neq 0$



Seja t uma recta que passa em S e é paralela a r (e não ultraparalela). Então $t \cap r \in \{0, \infty\}$

- Se $t \cap r = \infty$ então t tem eq. $\mathrm{Re}\, z = x_0$
- Se $t \cap r = \{0\}$ basta argumentar que a mediatriz de $[OS]$ intersecta o eixo real num único pto ou então determinar o pto de int.

$\vec{OS} = (x_0, y_0)$ mediatriz: $x_0 x + y_0 y = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2}$

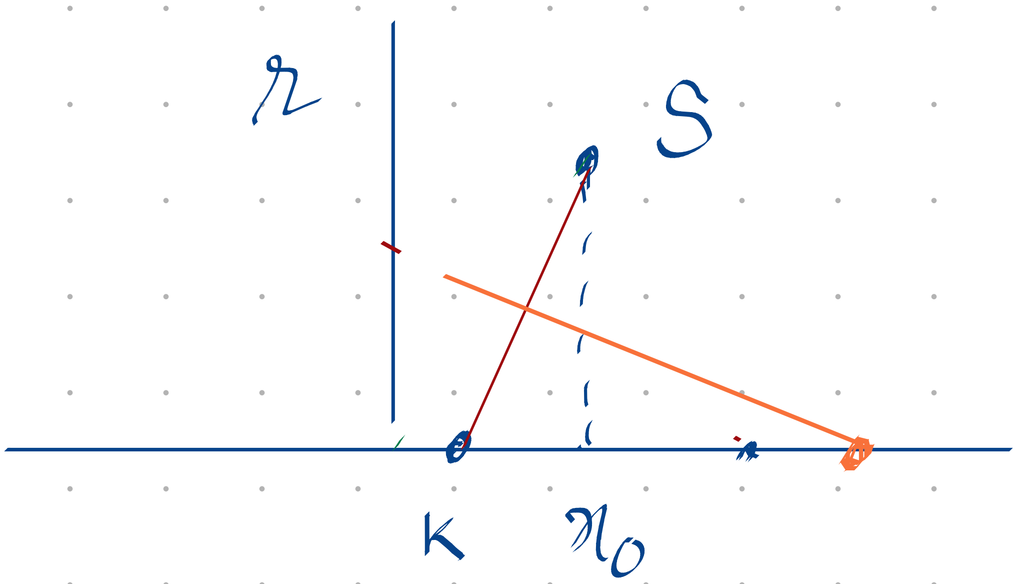
$M = \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ $\left.\begin{array}{l}\text{intersecção}\\ \text{c/ o eixo real}\end{array}\right\}$ $x = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2x_0}$

t tem eq: $\left| z - \frac{x_0^2+y_0^2}{2x_0} \right| = \frac{x_0^2+y_0^2}{2|x_0|}$

passa em 0

Em alternativa podemos usar a alínea 1 f).

Para as rectas ultraparalelas temos:



Podemos supor sem perda de generalidade que $x_0>0$

Considerando $k \in]0, x_0[$ as circunferências com centro no eixo real que passam em S e k não intersectam o eixo imaginário pelo que definem rectas hiperbólicas ultraparalelas a r.

Em alternativa, fazendo as contas, temos

$$\vec{KS} = (x_0 - k, y_0)$$

$$M = \left(\frac{x_0+k}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$$

$$\begin{cases} (x_0-k)x + y_0 y = \frac{x_0^2 - k^2 + y_0^2}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow x = \frac{x_0^2+y_0^2-k^2}{2(x_0-k)}$$

$$\left| z - \frac{x_0^2+y_0^2-k^2}{2(x_0-k)} \right| = \left| k - \frac{x_0^2+y_0^2-k^2}{2(x_0-k)} \right|$$

$$= \frac{(x_0-k)^2 + y_0^2}{2(x_0-k)}$$