Aula Anterior: Exs de Isometrias Hiperbólicas

$\mathbb{H}$ $\mathbb{D}$

1) Rotação hiperbólica

um único pto fixo em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$

ex: $\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}(z) = e^{\alpha i} z$

$G_{\mathbb{D}}$

$G_{\mathbb{H}}$

2) Rotação limite

um único pto fixo em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$

ex: $\boxed{\rho^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha}(z) = z + \alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\infty \in \overline{\mathbb{R}}$

3) Translação hiperbólica ao longo da recta hiperbólica

2 ptos fixos em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$

a recta hiperbólica une os pts fixos

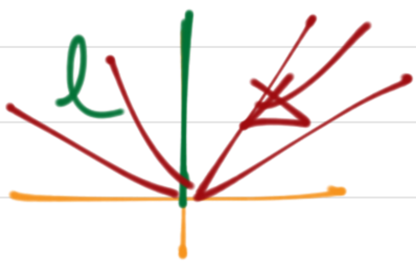
$\overline{\mathbb{R}}$

$\ni$

$0 \quad \infty$

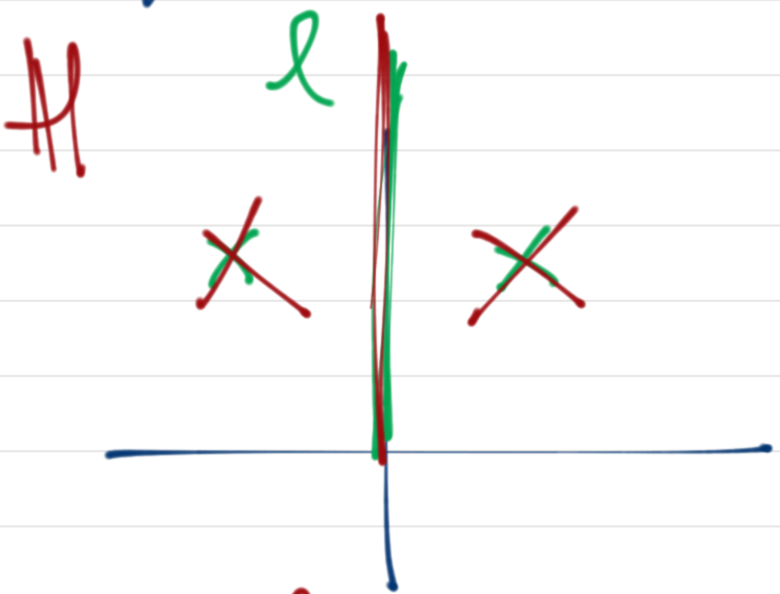
ex: $T_k^{\mathbb{H}}(z) = kz$

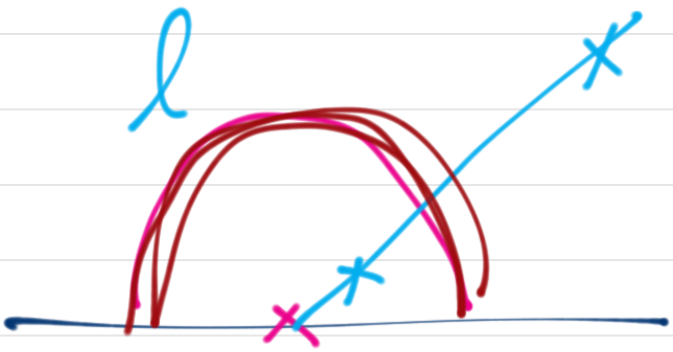
translação ao longo de l



4) Reflexão hiperbólica

fixa uma reta hiperbólica





Reflexão euclidiana

inversão

Classificação de Isometrias:

Dados $P_1, P_2 \in \mathbb{H}$ (ou $\mathbb{D}$)

O que é o conjunto dos ptos equidistantes de P_1 e P_2 para a distância hiperbólica

$d_{\mathbb{H}}$ (ou $d_{\mathbb{D}}$)?

$$L = \{ X \in \mathbb{H} : d_{\mathbb{H}}(X, P_1) = d_{\mathbb{H}}(X, P_2) \}.$$

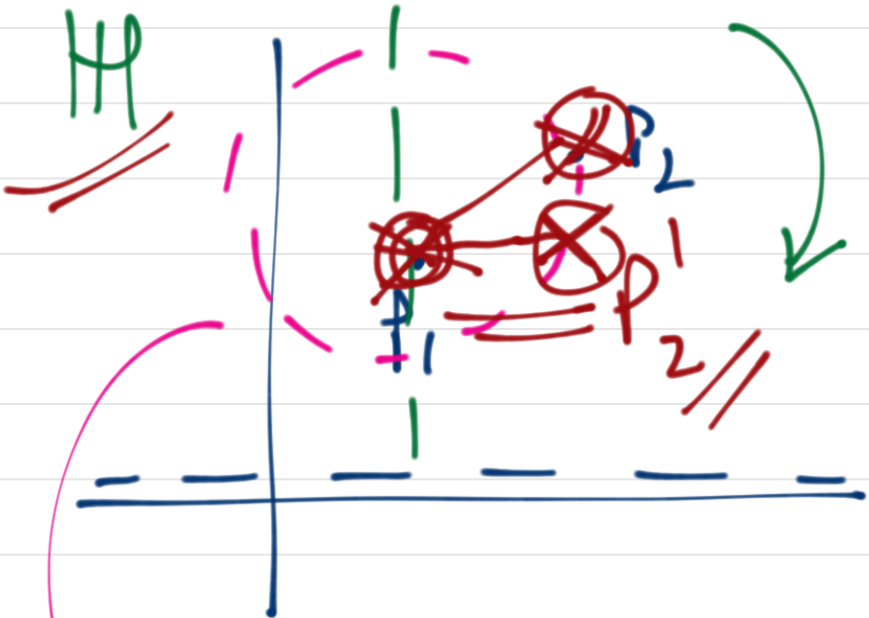
Vamos ver que L é uma reta hiperbólica ℓ e que

$$R_\ell(P_1) = P_2$$

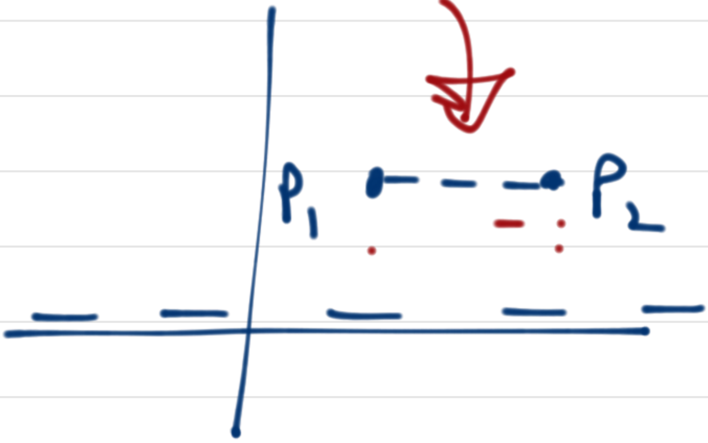
e

$$R_\ell(P_2) = P_1$$

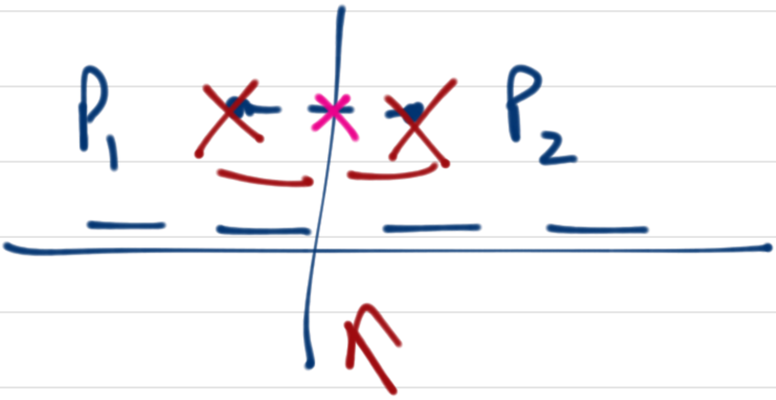
$\mathbb{H}$



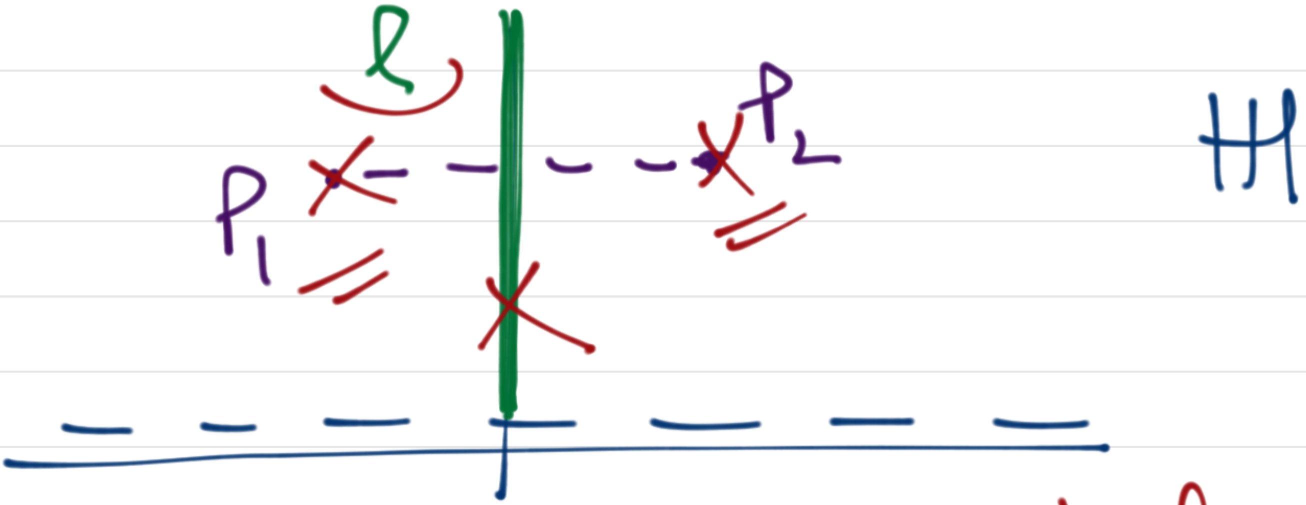
rotação hiperbólica em torno de P_1



arc. hiperbólica de centro (hip.) P_1 e raio (hip) $d_{\mathbb{H}}(P_1, P_2)$



rotação limite em torno de ∞



$\ell \subset L$ $= \{x : d_{\mathbb{H}}(x, P_1) = d_{\mathbb{H}}(x, P_2)$

pois ...

$x \in \ell$ $\leftarrow$ $\ell \subset L$

$$d_{\mathbb{H}}(x, P_1) = d_{\mathbb{H}}(R_\ell^{\mathbb{H}}(x), R_\ell^{\mathbb{H}}(P_1))$$

$$= d_{\mathbb{H}}(x, P_2)$$

$R_\ell^{\mathbb{H}}$ coincide com a reflexão euclidiana em ℓ

$\ell \subset L$ pois...

Se existir $\boxed{R \in L \setminus \ell}$:

$\Downarrow$

- $d_{\mathbb{H}}(R, P_1) = d_{\mathbb{H}}(R, P_2)$
- $R' := R_\ell(R) \in L$

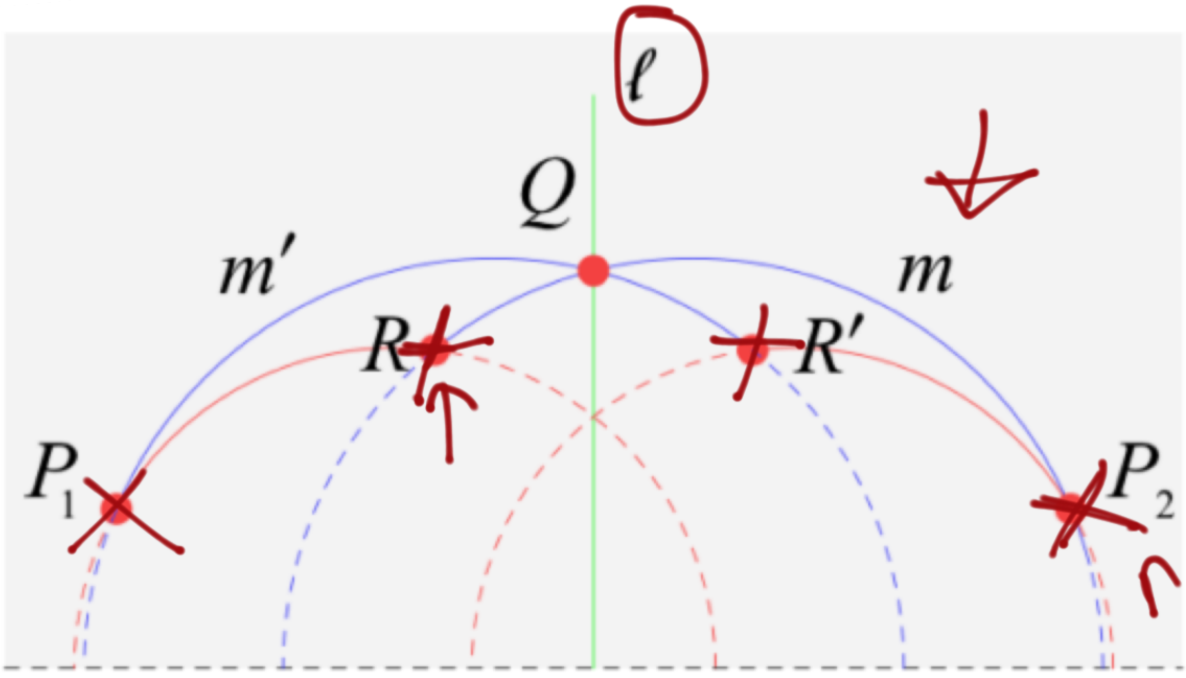
pois

$$\boxed{d_{\mathbb{H}}(R', P_1)} = d_{\mathbb{H}}(R_\ell(R'), R_\ell(P_1))$$

$$= d_{\mathbb{H}}(R, P_2) = d_{\mathbb{H}}(R, P_1) =$$

$R \in L$

$$= d_{\mathbb{H}}(R_\ell(R), R_\ell(P_1)) = d_{\mathbb{H}}(R', P_2)$$



$\to$ m – recta hip. RP_2

$\to$ m' – " " $R'P_1$

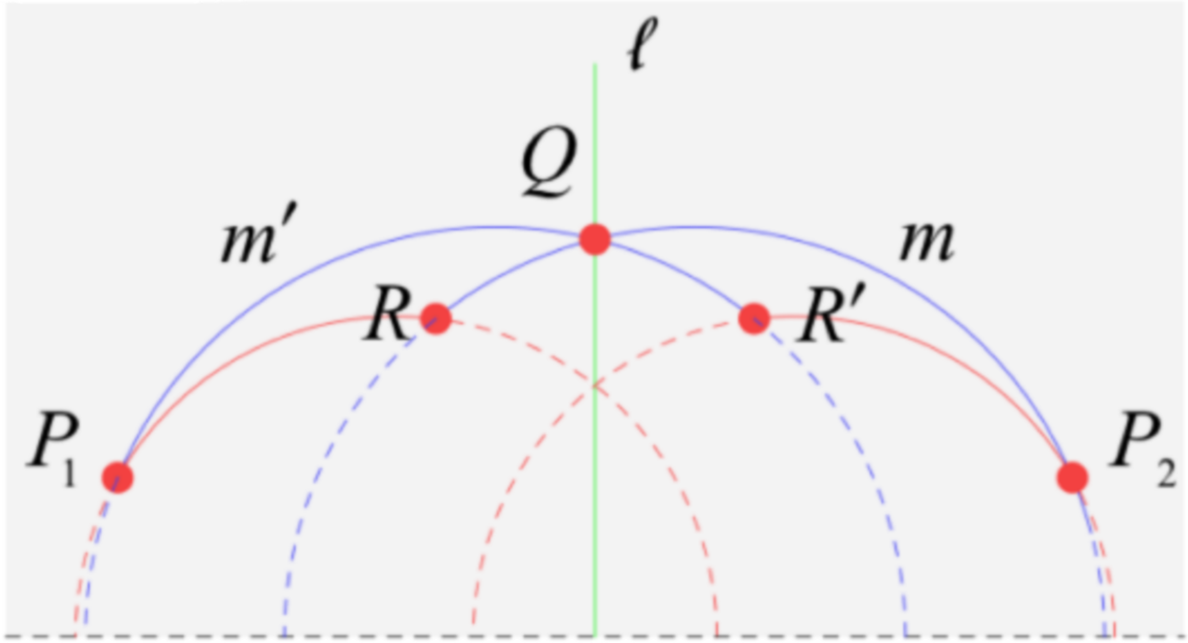
$\Big\}$ $R_\ell(m) = m'$

R, R' estão em lados opostos de ℓ

$\Rightarrow$ $m \cap \ell \neq \emptyset$

$Q := m \cap \ell$

$Q = m \cap \ell \cap m'$



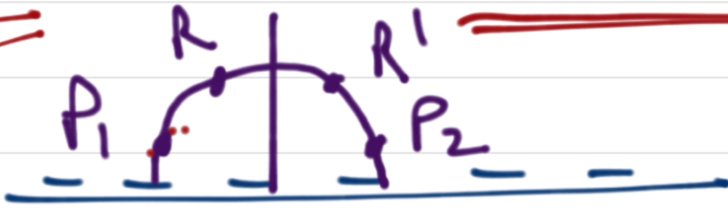
RP_2

NOTA: $m \neq m'$ $= R'P_1$

m'

$\parallel$

Se $m = m' \Rightarrow P_1, P_2, R, R' \in m$



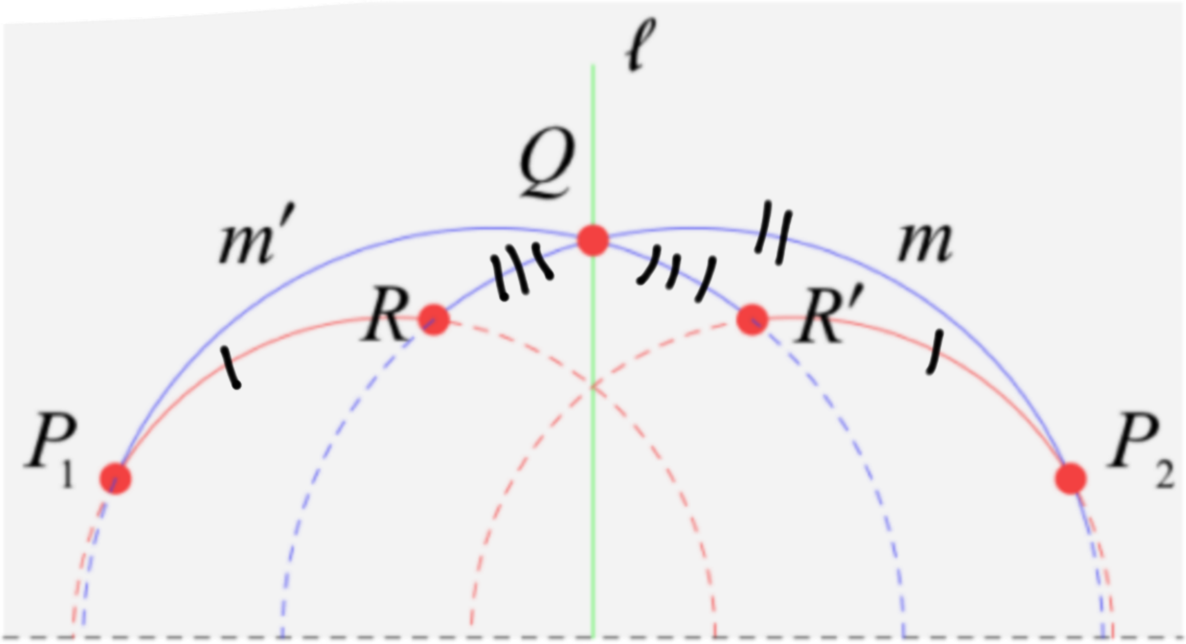
$$d_{\mathbb{H}}(P_1,P_2) = d_{\mathbb{H}}(P_1,R) + d_{\mathbb{H}}(R,R') + d_{\mathbb{H}}(R',P_2)$$

$$= d_{\mathbb{H}}(P_2,R) + d_{\mathbb{H}}(R,R') + d_{\mathbb{H}}(R,P_1)$$

$R \in \ell$

$$= d_{\mathbb{H}}(P_2,P_1) + d_{\mathbb{H}}(R,R') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = R' \in \ell \quad ↯$$



$$\underbrace{d_{\mathbb{H}}(P_2, R')}_{\text{REL}} \overset{R}{=} d_{\mathbb{H}}(P_1, R) =$$

$$= d_{\mathbb{H}}(P_2, R) =$$

$$= d_{\mathbb{H}}(P_2, Q) + d_{\mathbb{H}}(R, Q)$$

$$= d_{\mathbb{H}}(P_2, Q) + d_{\mathbb{H}}(Q, R')$$

$$\Rightarrow Q \in P_2R' \Rightarrow \underbrace{P_2, \underbrace{R', Q}_{m'}, R}_{m} \in m = m'$$

? $\Downarrow$

Teorema: Qualquer isometria de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ é a composta de 1, 2 ou 3 reflexões hiperbólicas

Porquê?

1 Um pto de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ fica univocamente determinado pelas suas distancias a 3 pts distintos que não estejam na mesma recta hiperbólica.

Prop: Se $X \neq Y \in \mathbb{H}$ (ou $\mathbb{D}$) são t.q.

$$d_{\mathbb{H}}(X, P_i) = d(Y, P_i) \quad i = 1, 2, 3$$

$\Rightarrow$ $P_i \in$ conj dos pts eq. de X e Y

$\Rightarrow$ P_i estão numa mesma reta hiperbólica ↯

$P_1 \qquad P_2 \qquad P_3$

$X = Y \qquad X = Y \qquad X = Y$

(2) Se uma isometria fixa 3 pts não colineares é necessariamente a identidade

$$d(x, P_i) = d(f(x), f(P_i))$$

$$= d(f(x), P_i) \quad i = 1,2,3$$

$$\Rightarrow x = f(x) \quad \forall x$$

③ P_1, P_2, P_3 não colineares

$$\boxed{f(P_1),\ f(P_2),\ f(P_3)}$$

f

- $f = id \Rightarrow f = R_\ell \circ R_\ell$
- $\boxed{f \neq id} \Rightarrow \exists\, i \in \{1,2,3\}$ t.q. $f(P_i) \neq P_i$

ℓ - recta hip. dos pts equid. de P_1 e $f(P_1)$

$f(P_1) \neq P_1$

$R_\ell(P_1) = f(P_1)$

$\cdot\ R_\ell(P_1) = f(P_1)$

Se ℓ $\left\{\begin{array}{l} R_\ell(P_2) = f(P_2) \\ R_\ell(P_3) = f(P_3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R_\ell \circ f = id}$

$\Rightarrow f = R_\ell$

c.c. se por ex:

$$f(P_2) \neq R_\ell(P_2)$$

m - recta dos pts equid. de $f(P_2)$ e $R_\ell(P_2)$

$$R_m(R_\ell(P_2)) = f(P_2)$$

$$R_m(R_\ell(P_1)) \stackrel{?}{=} f(P_1)$$

$$R_m(R_\ell(P_1)) = f(P_1) \iff$$

$$\underbrace{R_\ell(P_1)}_{f(P_1)}$$

$$\iff f(P_1) = R_m(f(P_1))$$

$$\iff f(P_1) \in m$$

$$\iff d(f(P_1), f(P_2)) =$$

$$\overset{?}{=} d(f(P_1), R_\ell(P_2))$$

$$d(f(P_1), f(P_2)) = d(P_1, P_2) =$$

$$= d(R_\ell(P_1), R_\ell(P_2)) = d(f(P_1), R_\ell(P_2))$$

$$\cdot \quad \underbrace{(R_m \circ R_\ell)}(P_1) = f(P_1)$$

$$\text{"} \qquad (P_2) = f(P_2)$$

$$\text{se} \quad (R_m \circ R_\ell)(P_3) \cancel{=} f(P_3)$$

$$\Rightarrow f = R_m \circ R_\ell$$

c.c. $(R_m \circ R_\ell)(P_3) \neq f(P_3)$

m - reta hip. dos pts equid. de $f(P_3)$ e $(R_m \circ R_\ell)(P_3)$

$$\underbrace{(R_m \circ R_m \circ R_\ell)}(P_3) = f(P_3)$$

...

$$(R_n \circ R_m \circ R_\ell)(P_1) = f(P_1)$$
$$(P_2) = f(P_2)$$
$$(P_3) = f(P_3)$$

$G_{\mathbb{D}} \subset \boxed{Iso(\mathbb{D})}$

$\boxed{G_{\mathbb{H}}} \subseteq Iso(\mathbb{H})$

Conclusão:

Os grupos das isometrias de $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$ são respectivamente $G_{\mathbb{H}}$ e $G_{\mathbb{D}}$

$G_{\mathbb{H}} \subset Iso(\mathbb{H})$

$Iso(\mathbb{H}) \subset G_{\mathbb{H}}$

contém todas as reflexões em rectas hiperbólicas

Isometrias

Directas – Composta de 2 reflexões

Inversa – c. c.

Para terminar a classificação de isometrias de $\mathbb{H}$ e $\mathbb{D}$ precisamos de 2 resultados

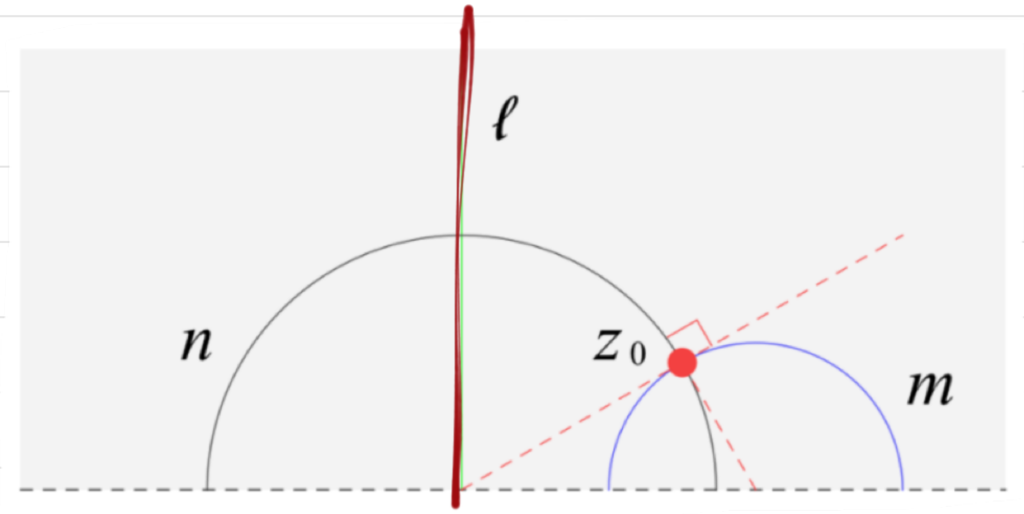
① l, m - rectas hip. de $\mathbb{H}$ (ou $\mathbb{D}$)

que não se intersectam em $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$)

$\Rightarrow \exists!$ recta hiperbólica n perp. a l e a m.

l, m dizem-se

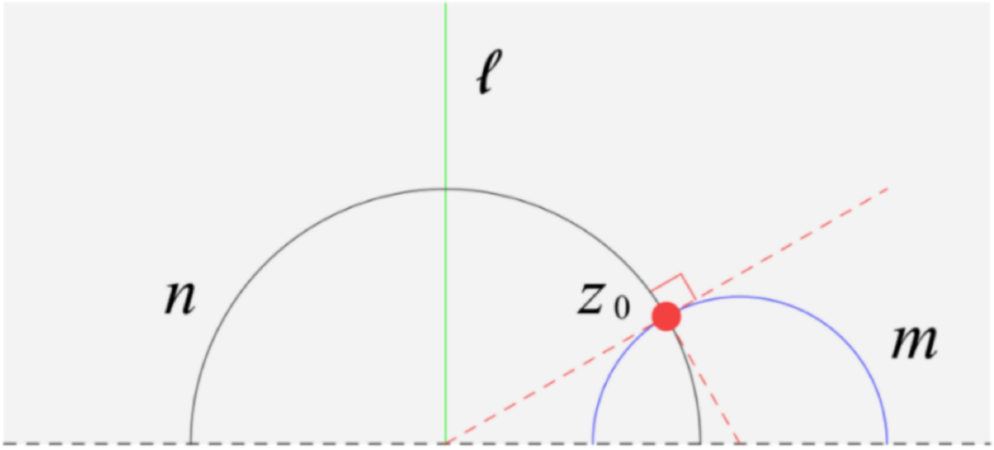
ULTRAPARALELAS



· ℓ e m não se intersectam em $\mathbb{H} \cup \overline{\mathbb{R}}$

· Compondo com uma isometria posso supor ℓ - recta de eq. $\mathrm{Re}\, z = 0$

$\Rightarrow$ m é uma circ. euclidiana (c.c. $\ell \cap m = \infty$)



- $n \perp \ell \Rightarrow n$ tem eq. $|z| = cte$
  (ℓ é um raio de n)

- $n \perp m \Rightarrow$ um raio de m é tangente a n
  $\Rightarrow$ um raio de n é tang. a m

$$\begin{cases} (x-k)^2 + y^2 = r^2 & |k| > r \\ y = t x \end{cases}$$

Só pode ter 1 solução

$$\begin{cases} (x-k)^2 + y^2 = r^2 & |k| > r \\ y = tx \end{cases}$$

$$\cdot \ (x-k)^2 + t^2 x^2 = r^2$$

$$x^2 - 2kx + k^2 + t^2 x^2 = r^2$$

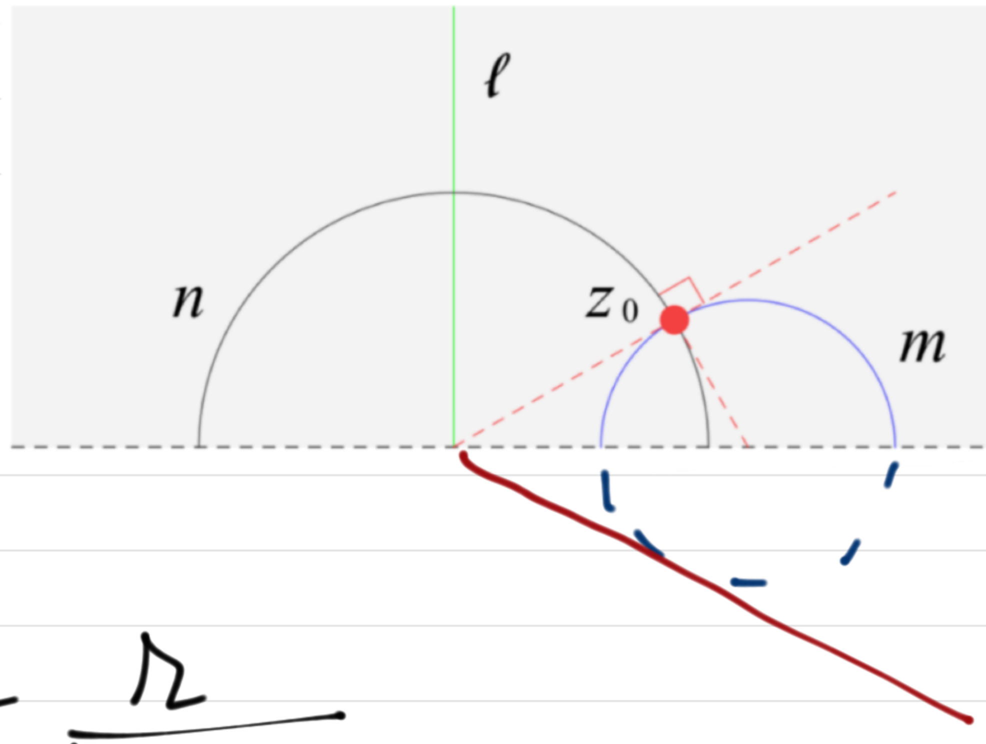
$$(1+t^2)x^2 - 2kx + k^2 - r^2 = 0$$

$$x = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4(1+t^2)(k^2-r^2)}}{2(1+t^2)}$$

$\Delta = 0$

$$\Leftrightarrow k^2 - (1+t^2)(k^2-r^2) = 0$$

$$t^2 = \frac{k^2}{k^2-r^2} - 1 = \frac{r^2}{k^2-r^2}$$



$$t = \pm \frac{r}{\sqrt{K^2 - r^2}}$$

(2) Se f é uma isometria inversa de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ então a sua extensão a $\overline{\mathbb{C}}$ tem 2 pts fixos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$)

($\mathbb{H}$)

$$f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

$a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$ad-bc<0$

Se $x \in \mathbb{R}$ é pto fixo de f

$\bar{x} = x$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x \Rightarrow ax+b = cx^2+dx$$

$$\Rightarrow cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

1) $c = 0 \Rightarrow f(x) = x$

$ad - bc < 0$

$\underbrace{ad < 0}_{}$

a,d têm sinais contrários

$\Rightarrow a \neq d$

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} x = \frac{b}{d-a}$$

2 pts fixos em $\mathbb{R}$

ii) $c \neq 0$

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

$$x = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$$

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc =$$
$$= d^2 - 2ad + a^2 + 4bc$$
$$= d^2 + a^2 - 4(ad - bc) + 2ad$$
$$= (a+d)^2 - 4(ad - bc) > 0$$

$-$

Teorema: Uma isometria hiperbólica é de um dos seguintes tipos:

1) rotação hiperbólica
2) " limite
3) translação hiperbólica ao longo de uma recta hiperbólica
4) reflexão numa recta hiperbólica
5) reflexão com deslize ao longo de uma recta hiperbólica:
Composta de uma reflexão hip com uma translação ao longo da mesma recta hiperbólica

Porquê:

- f - isometria directa
  ($\Rightarrow$ transf. de Möbius)

$f = R_\ell \circ R_m$ $\quad \ell, m$ rectas hiperbólicas

① $\ell \cap m = z_0 \in \mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$

$\Longrightarrow z_0$ é pto fixo de f

Podemos supor $z_0 = 0 \in \mathbb{D}$

$\Rightarrow$ ℓ, m são rectas euclidianas que passam em 0

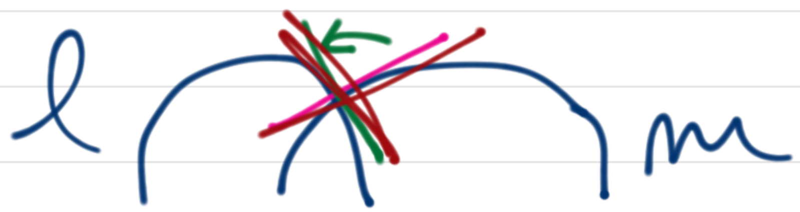
$\Rightarrow R_l \circ R_m = \rho^{\mathbb{D}}_{0,2\alpha}$

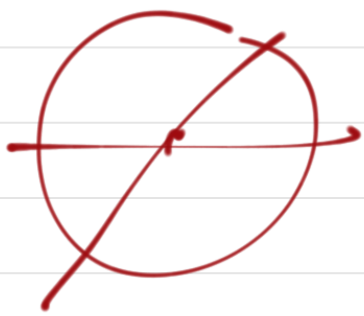
$\alpha = \measuredangle_n (m, l)$

Em geral

hip.

$R_l \circ R_m =$ rotação de centro z_0 e $\measuredangle$ $\alpha = 2\measuredangle_{0_2}(m, l)$





NOTA: $\ell \cap m = z_0$

$$h(z_0)=0 \qquad h \in G_D$$

$$\underbrace{(h\circ R_\ell \circ \cancel{h^{-1}})}_{R_{\tilde\ell}}\ \underbrace{(\cancel{h}\circ R_m \circ h^{-1})}_{R_{\tilde m}}$$

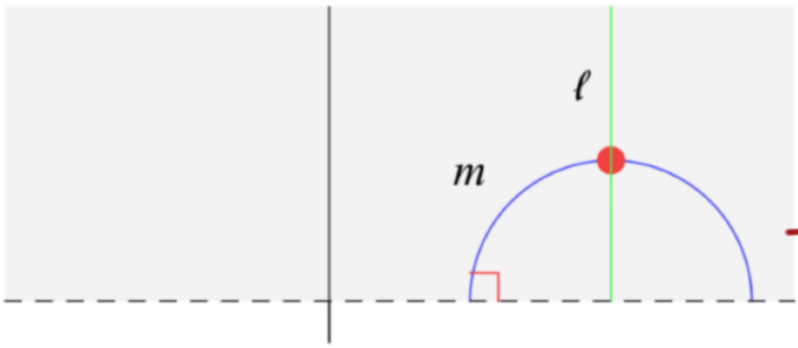
$$\tilde\ell = h(\ell) \qquad \tilde m = h(m)$$

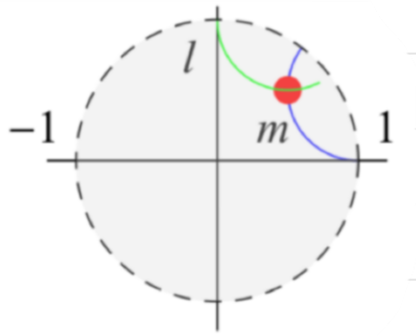
$$\underbrace{R_{\tilde\ell}\circ R_{\tilde m}}_{\rho_{0,2\alpha}} = h\circ (R_\ell \circ R_m)\circ h^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad R_\ell \circ R_m = h^{-1}\circ \rho_{0,2\alpha}\circ h = \rho_{h^{-1}(0),2\alpha} = \rho_{z_0,2\alpha}$$

$\tilde\ell \cap \tilde m = \{0\}$

$\mathbb{H}$ $\mathbb{D}$





Exemplos de retas concorrentes

② Se $\ell \cap m = z_0 \in \partial D$ ou $\overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow z_0$ é pto fixo de rectas paralelas

$$f: \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

Podemos supor $z_0 = \infty$ $(\mathbb{H})$

$\Rightarrow \ell, m$

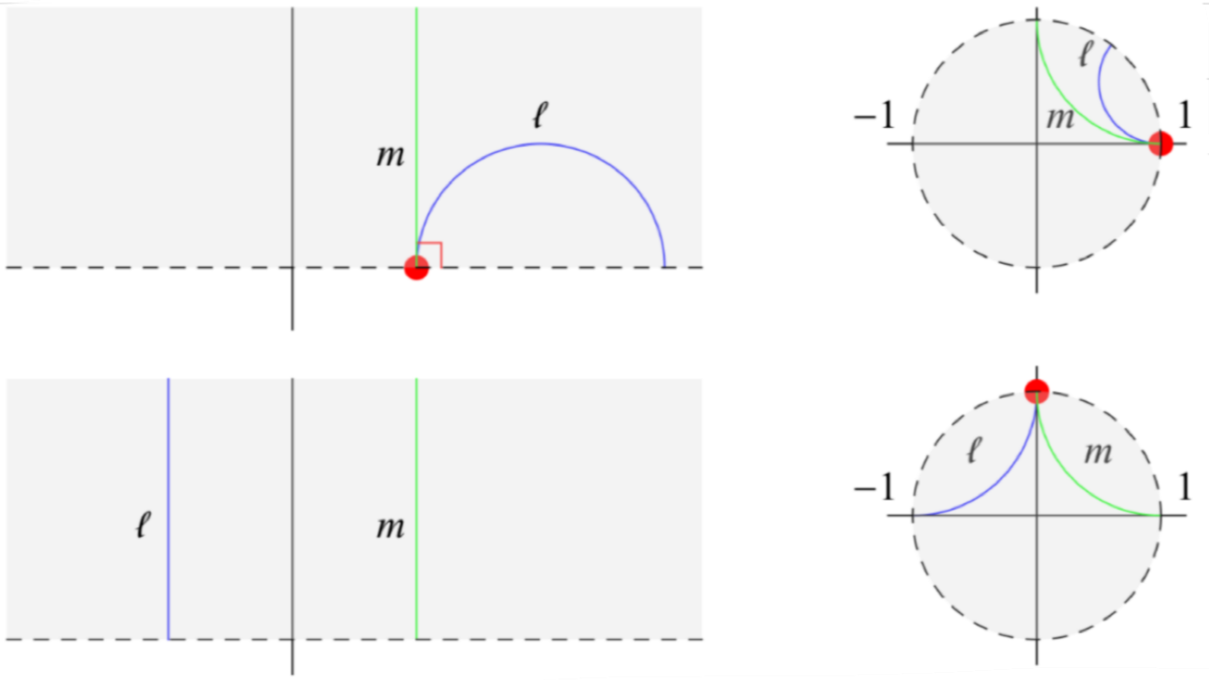
rotação limite em torno de ∞

$\mathbb{H}$

$P(\infty, 2(a-b))$

$\|$

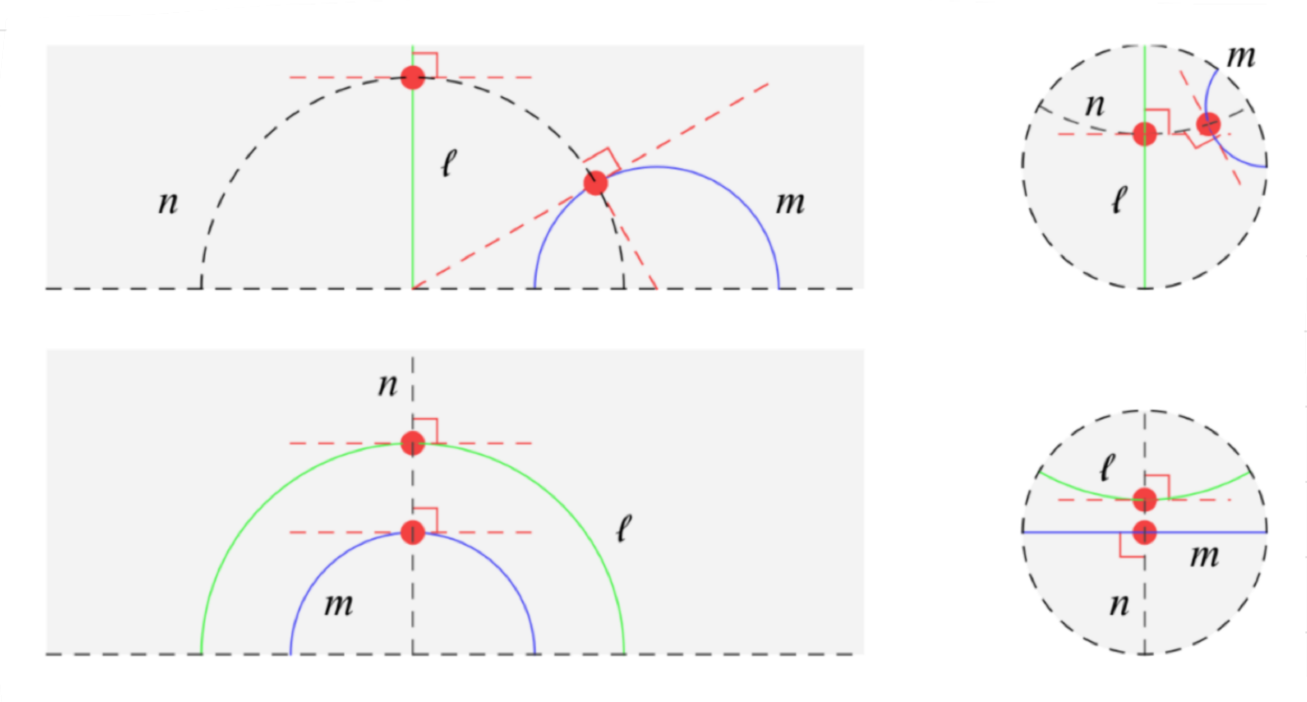
$$(R_\ell \circ R_m)(z) = z + 2(a-b)$$



Exemplos de rectas paralelas

③ Se $\ell \cap m$ não se intersectam em $\mathbb{H} \cup \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{D} \cup \partial \mathbb{D}$

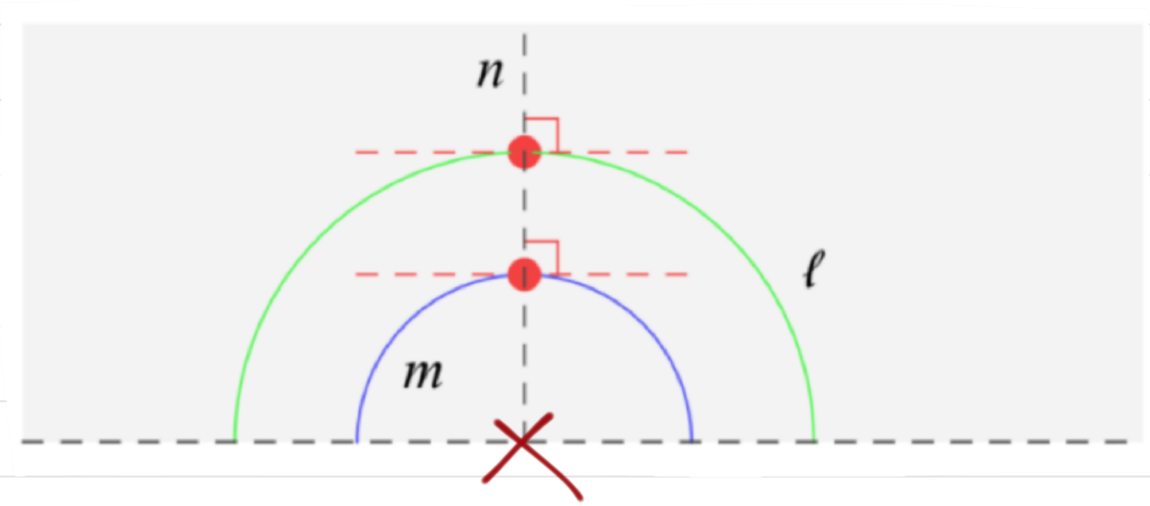
— ULTRAPARALELAS



$\exists!\, n \perp$ a ℓ e a m

Podemos supor

n = eixo imaginário



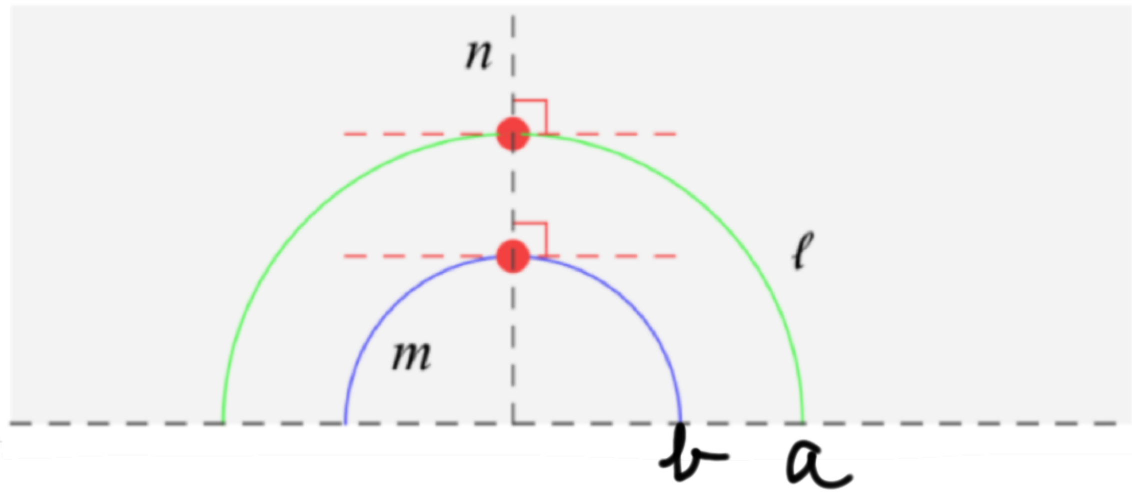
h

$R_\ell, R_m = ?$

$$|z|^2 = r^2 \iff z\bar{z} = r^2$$

$$\iff z = \frac{r^2}{\bar{z}}$$

$$I_c(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$$



$$R_m(z) = \frac{b^2}{\bar{z}} \qquad R_\ell(z) = \frac{a^2}{\bar{z}}$$

$$\underbrace{(R_\ell \circ R_m)(z) = \frac{a^2}{b^2}\, z}$$

0 ↓ ∞

translação hiperbólica ao longo da recta hip. n

→ recta que "une" os pts fixos: 0 e ∞

Conclusão:

f isometria directa:

1. rotação hip. — rectas concorrentes
2. rotação limite — rectas paralelas
3. translação hip. — rectas ultraparalelas

f inversa

$\Rightarrow$ tem 2 pts fixos em $\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\partial \mathbb{D}$): z_0, z_1

l - recta hip que "une os dois ptos fixos"

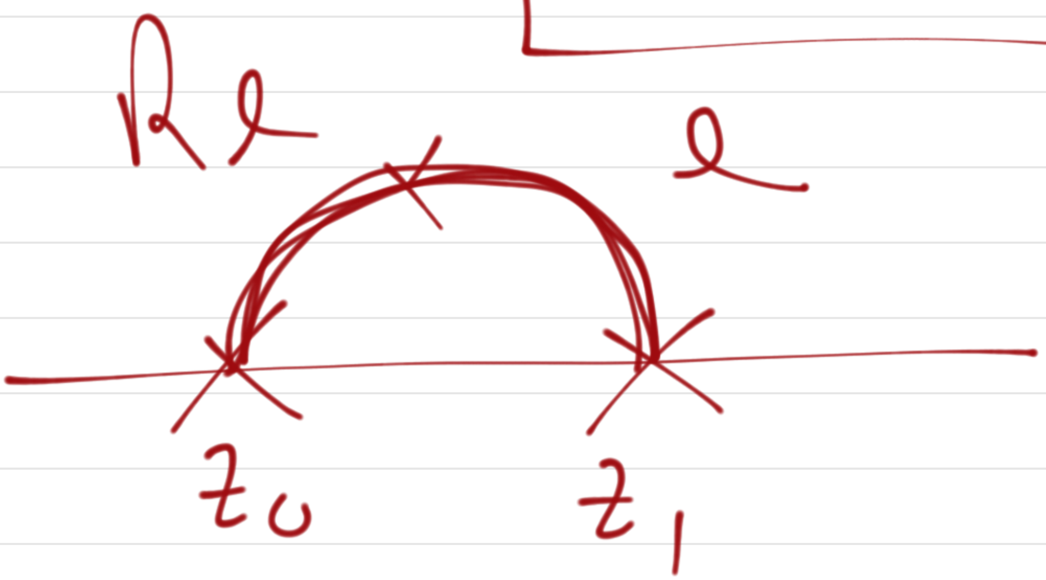
→ Se f fixa os pontos de ℓ

$$f = R_\ell$$

$f \circ R_\ell$ – direta c/ 3 pts fixos

$\Rightarrow f \circ R_\ell = id$

$\Rightarrow f = R_\ell$



→ Se f não fixa l

$f \circ R_l$ — directa

fixa z_0, z_1

$\Longrightarrow$ translação hiperbólica ao longo de l

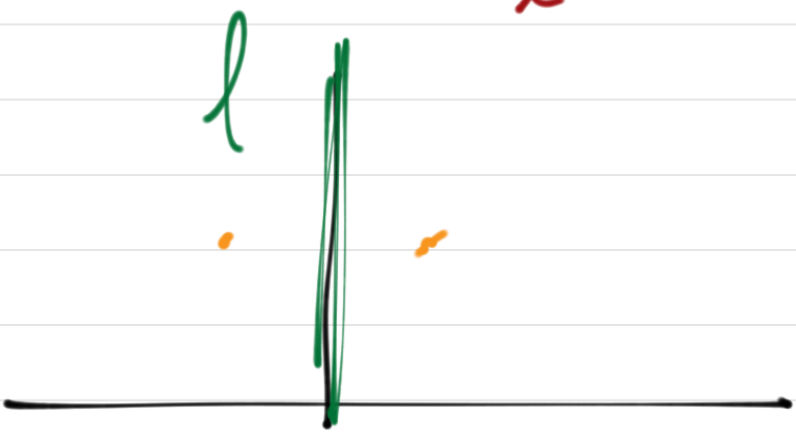
$f \circ R_l = T_l$

$\Rightarrow f = T_l \circ R_l$

Ref. c/ deslize ao longo de l

NOTA: Também aqui

$$T_\ell \circ R_\ell = R_\ell \circ T_\ell$$



Seja ℓ - eixo imaginário

$$R_\ell(z) = -\overline{z}$$

$$T_\ell(z) = \lambda z \quad , \lambda \in \mathbb{R}^+$$

$$(T_\ell \circ R_\ell)(z) = -\lambda \overline{z} = (R_\ell \circ T_\ell)(z)$$

Corolário:

f isometria directa $\neq id$ de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$

1) um único pto fixo em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$

$\Rightarrow$ Rotação hiperbólica

2) um único pto fixo em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ Rotação limite

3) 2 ptos fixos em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ Translação hiperbólica ao longo da recta hiperbólica que une os pts fixos

· f isometria inversa de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$

1) fixa uma reta hiperbólica

$\Rightarrow$ Reflexão hiperbólica

2) fixa $\underline{2}$ pts em $\partial\mathbb{D}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ e nenhum pto em $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$

$\Rightarrow$ Reflexão com deslize ao longo da reta que une os pts fixos.

Exs.:

1) $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$

$$f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2 - 1 > 0$

isometria directa

ptos fixos: $\dfrac{2z+1}{z+1} = z \iff$

$\iff 2z+1 = z^2+z \iff$

$\iff z^2 - z - 1 = 0 \iff$

$\iff z = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

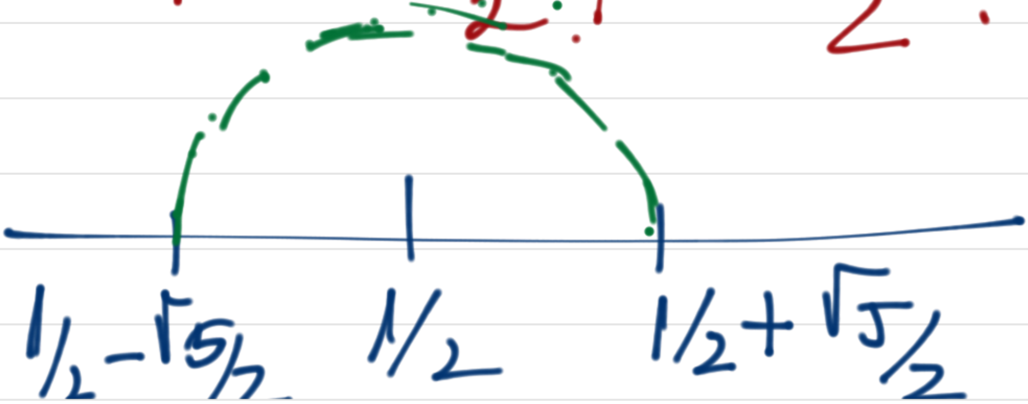
$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ //

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ //

2 pts fixos em $\underline{\mathbb{R}}$ //

$\Rightarrow$ f é uma <u>translação hiperbólica</u> ao longo da reta hiperbólica de eq.

$$\left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$



2) $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$$f(z) = \frac{2\bar{z}+3}{\bar{z}+1}$$

isometria inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$2-3<0$

Pts fixos:

$$f(z) = z \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}+3}{\bar{z}+1} = z \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2\bar{z}+3 = |z|^2 + z \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 + z - 2\bar{z} - 3 = 0$

$$|z|^2 + z - 2\bar{z} - 3 = 0 \qquad z = x + yi$$

$$x^2 + y^2 + x + yi - 2x + 2yi - 3 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 3 = 0 \\ 3y = 0 \end{cases}$$

$1/2 - \sqrt{13}/2$ $\qquad$ $1/2 + \frac{\sqrt{13}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Reflexão com deslize ao longo da reta sup. de eq. $|z - 1/2| = \sqrt{13}/2$

3) $f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$$f(z) = \frac{2\bar{z}+3}{\bar{z}-2}$$

inversa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$-4-3 < 0$

Ptos fixos:

$$\frac{2\bar{z}+3}{\bar{z}-2} = z \iff 2\bar{z}+3 = |z|^2 - 2z$$

$$\iff |z|^2 \overbrace{-2z-2\bar{z}}^{-2(z+\bar{z})} - 3 = 0$$

circ. de centro 2

$$\iff |z|^2 - 4\,\mathrm{Re}\,z - 3 = 0$$

$$\iff x^2+y^2-4x-3=0$$

$$x^2+y^2-4x-3=0$$

$$(x-2)^2+y^2=3+4=7$$

$$|z-2|=\sqrt{7}$$

Reflexão na recta hiperbólica $|z-2|=\sqrt{7}$