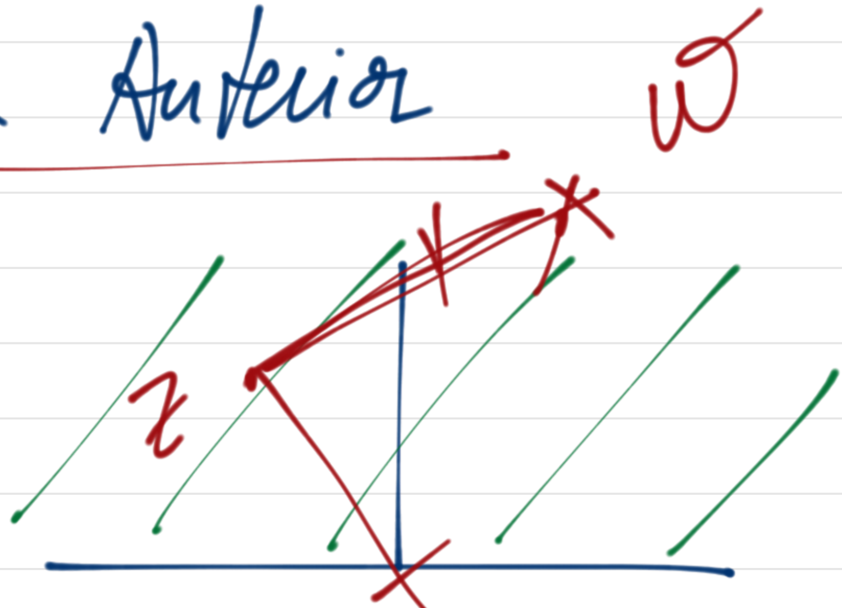
Aula Anterior

$\mathbb{H}$



$$\delta_{\mathbb{H}}(z,w) = \frac{|z-w|}{|z-\overline{w}|}$$

$$d_{\mathbb{H}}(z,w) = 2\,\mathrm{arctgh}\left(\delta_{\mathbb{H}}(z,w)\right)$$
$$= \ln\left(\frac{1+\delta_{\mathbb{H}}(z,w)}{1-\delta_{\mathbb{H}}(z,w)}\right)$$

$$G_{\mathbb{H}} = \{ f \in \text{Möb} : f(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \}$$

- $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\; ad - bc > 0$

$f(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $\; ad - bc < 0$

$f \in G_{\mathbb{H}} \Rightarrow$

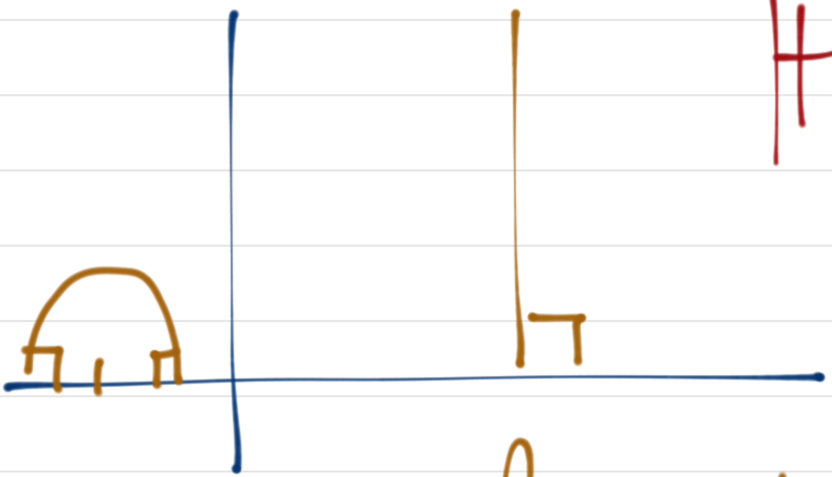
$$d_{\mathbb{H}}(f(z), f(w)) = $$

$$= d_{\mathbb{H}}(z, w)$$

São isometrias para $d_{\mathbb{H}}$

Rectas hiperbólicas

$\mathbb{H}$



$|z-k|=r$ $\qquad$ $\mathrm{Re}\, z = k$

$k \in \mathbb{R}$

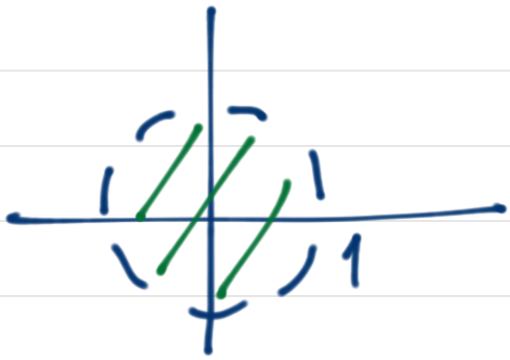
Circunferencias hiperbólicas

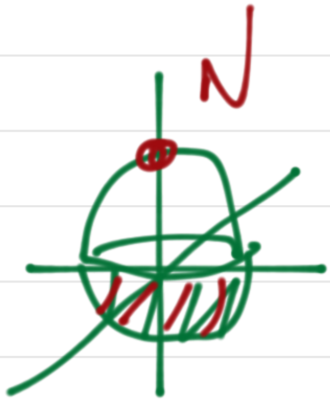
$C_r(z_0)$

(das circ. euclidianas
(centro e raio $\neq$s)

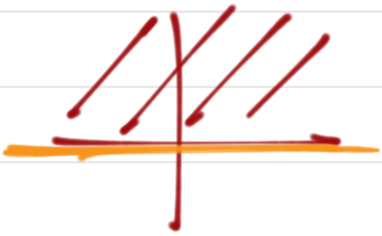
Disco de Poincaré

$$\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$





$$\mathbb{H} \xrightarrow{\quad J \quad} \mathbb{D}$$



Rudoy

J transf. de Möbius

$$\mathbb{H} \xrightarrow{J} \mathbb{D}$$

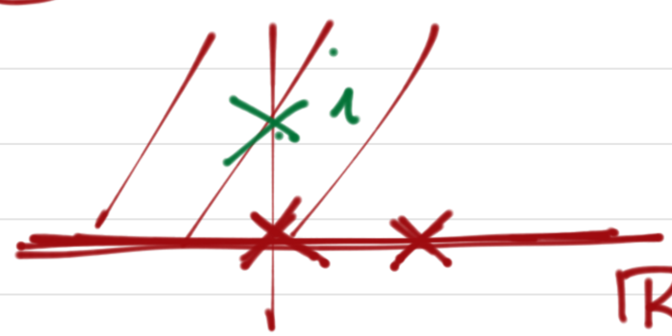
$$J(z) = \frac{iz+1}{z+i} \qquad \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

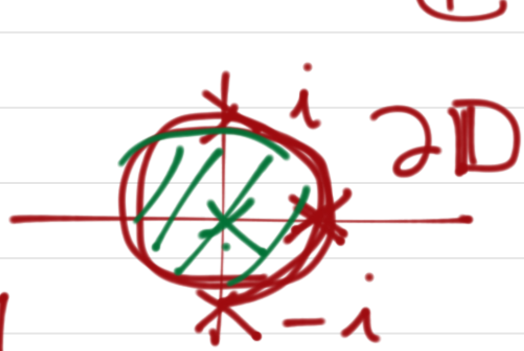
NOTA:

$$\left.\begin{aligned} J(0) &= -i \\ J(\infty) &= i \\ J(1) &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow J(\overline{\mathbb{R}}) = \partial\mathbb{D}$$

$\overline{\mathbb{C}}$

$$J(i) = 0 \in \mathbb{D}$$





$$\mathbb{H} \xrightarrow{\mathcal{J}} \mathbb{D}$$

$$\mathcal{J}(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

$$\mathcal{J}^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$$

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H} \xrightarrow{J} \mathbb{D} \qquad \delta_{\mathbb{D}}, d_{\mathbb{D}}$$

$\delta_{\mathbb{H}}$

$d_{\mathbb{H}}$

- $$J(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

- $$J^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$$

$$\delta_{\mathbb{D}}(z,w) = \delta_{\mathbb{H}}(J^{-1}(z), J^{-1}(w)) =$$

$$= \left| \frac{\frac{-iz+1}{z-i} - \frac{-iw+1}{w-i}}{\frac{i\bar{z}+1}{\bar{z}+i} - \frac{-iw+1}{w-i}} \right| = \dots = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|$$

$$\delta_{\mathbb{D}}(z,w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right|$$

$$d_{\mathbb{D}}(z,w) = 2\,\mathrm{arctgh}\left(\delta_{\mathbb{D}}(z,w)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1 + \delta_{\mathbb{D}}(z,w)}{1 - \delta_{\mathbb{D}}(z,w)}\right)$$

Rectas hiperbólicas em $\mathbb{D}$:

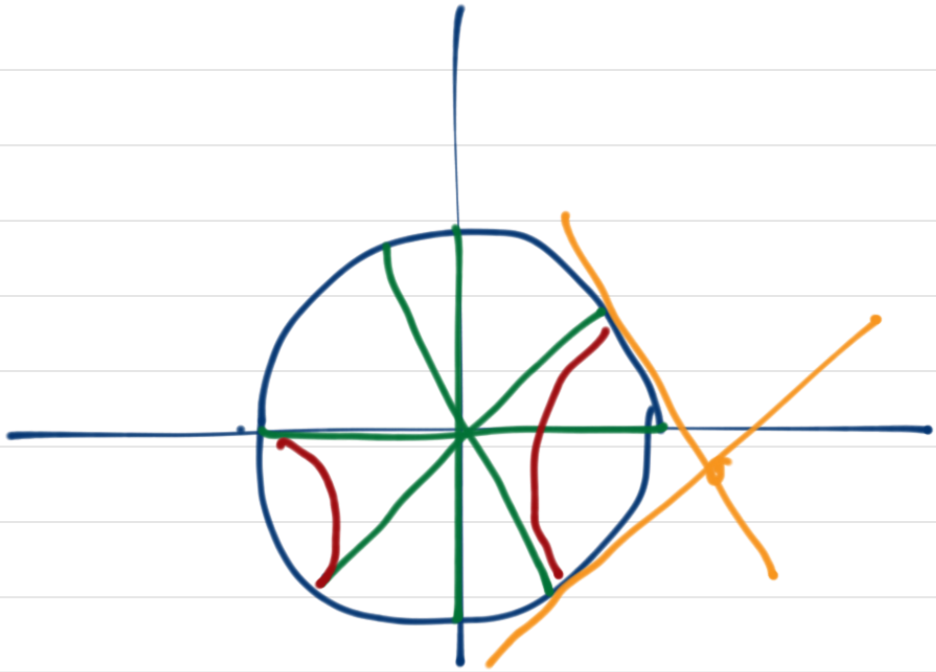
$J(\ell)$: ℓ - recta hiperbólica de $\mathbb{H}$.

$\Rightarrow$ rectas ou circ. $\perp$ a $|z| = 1$

$\Rightarrow$ restrição a $\mathbb{D}$ de

$\rightarrow$ rectas que passam na origem

$\rightarrow$ circ. $\perp$ a $\partial \mathbb{D}$



$$
\begin{tikzcd}
d_{\mathbb{H}} \quad \mathbb{H} \arrow[r, "J"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{D} \quad d_{\mathbb{D}} \arrow[d, "g"] \arrow[l, bend right, "J^{-1}"'] \\
\mathbb{H} \arrow[r, "J"'] & \mathbb{D}
\end{tikzcd}
$$

$g = J \circ f \circ J^{-1}$

$\cap$

$G\mathbb{H}$

- Se f é isometria de $\mathbb{H}$ $\Longrightarrow$

$g = \underline{\underline{J \circ f \circ J^{-1}}}$ é isometria de $\mathbb{D}$

- Se g é isometria de $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$ $\Longrightarrow$

$f = J^{-1} \circ g \circ J$ é isometria de $\underline{\mathbb{H}}$

$\Rightarrow$ As isometrias de $\mathbb{D}$ são obtidas a partir das isometrias de $\mathbb{H}$ por conjugação

$$\Rightarrow G_{\mathbb{D}} = \{ f \in \text{Möb} : f(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \}$$

são isometrias de $\mathbb{D}$.

NOTA:

$$f \in G_{\mathbb{D}} \Leftrightarrow h := J^{-1} \circ f \circ J \in G_{\mathbb{H}}$$

$G_{\mathbb{D}}$ os elementos de $G_{\mathbb{D}}$ são as transformações $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ da forma

$$f(z) = \frac{Az+B}{\overline{B}z+\overline{A}} \quad \text{ou} \quad f(z) = \frac{A\overline{z}+B}{\overline{B}\,\overline{z}+\overline{A}}$$

com $A, B \in \mathbb{C}$

$$|A|^2 - |B|^2 > 0$$

det $\begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix}$ det

$G_{\mathbb{D}}$

$G_{\mathbb{H}}$

$\circ\mu$ Os elementos de $G_{\mathbb{D}}$ são as aplicações $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ da forma

$$f(z) = e^{\alpha i} \frac{z - \beta}{-\overline{\beta} z + 1} \quad \text{ou}$$

$\alpha \in [0, 2\pi[$

$$f(z) = e^{\alpha i} \frac{\overline{z} - \beta}{-\overline{\beta}\,\overline{z} + 1}$$

$\beta \in \mathbb{C}$

$|\beta| < 1$

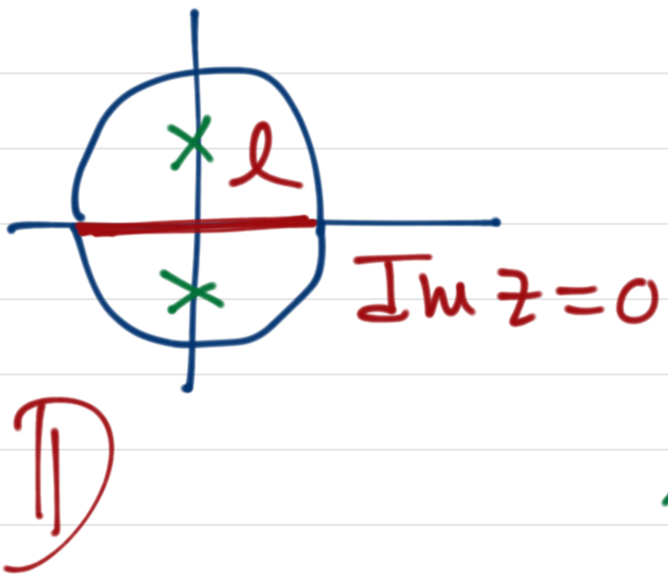
NOTA: $f(\beta) = 0$ qdo $f \in \text{Möb}^+$

Exemplos de Isometrias

$G_{\mathbb{D}}$ // $G_{\mathbb{H}}$ //

1) Reflexões hiperbólicas

ex: $R_{\ell}^{\mathbb{D}}(z) = \bar{z}$



- Coincide com a reflexão euclidiana na reta $y = 0$
- pts fixos: ℓ

Isometria de $\mathbb{H}$ induzida por $R_{\ell}^{\mathbb{D}}$?

$J^{-1}(w)$ w $\qquad z = J^{-1}(w)$ w

$$R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}} = J^{-1} \circ R_{\ell}^{\mathbb{D}} \circ J \ ?$$

$J^{-1}(\ell)$

$\tilde{\ell}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H} \arrow[r, "J"] \arrow[d, "R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}} = ?"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "R_{\ell}^{\mathbb{D}}"] \\
\mathbb{H} \arrow[r, "J"'] & \mathbb{D}
\end{tikzcd}$$

Fazemos as contas ou ...

Sabemos que

- $R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}} \in \text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$
- $R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}}$ fixa os pts de $J^{-1}(\ell)$ $\left(R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}} = J^{-1} \circ R_{\ell}^{\mathbb{D}} \circ J \right)$
- $0, 1, -1 \in \ell$

$J(z) = \dfrac{iz+1}{z+i}$

$J^{-1}(z) = \dfrac{-iz+1}{z-i}$

$$\left.\begin{aligned} J^{-1}(0) &= i \\ J^{-1}(1) &= 1 \\ J^{-1}(-1) &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$J^{-1}(\ell)$ - circunferência

$\Rightarrow R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}}$ é um elemento

de $\text{Möb} \setminus \text{Möb}^+$

e fixa 3 pts da circ.

unitária $\Rightarrow$ fixa todos

os pts da circ unitária

e $R_{\tilde{\ell}}^{\mathbb{H}}(z) = I(z) = 1/\bar{z}$

inversão na circ.

unitária

Em geral, se

$g \in G_{\mathbb{D}}$ e $g(m) = \ell$

m, ℓ rectas superlativas de $\mathbb{D}$

$$R^{\mathbb{D}}_m := g^{-1} \circ R^{\mathbb{D}}_\ell \circ g \in G_{\mathbb{D}}$$

é uma isometria que fixa os pontos da recta

$m \longrightarrow I_m$

O mesmo com $\mathbb{R}^{\mathbb{H}}_{\tilde{m}}$ //

Definição: uma reflexão de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) é uma isometria obtida de $R^{\mathbb{D}}_{\ell}$ (ou $R^{\mathbb{H}}_{\tilde{\ell}}$) pa conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$)

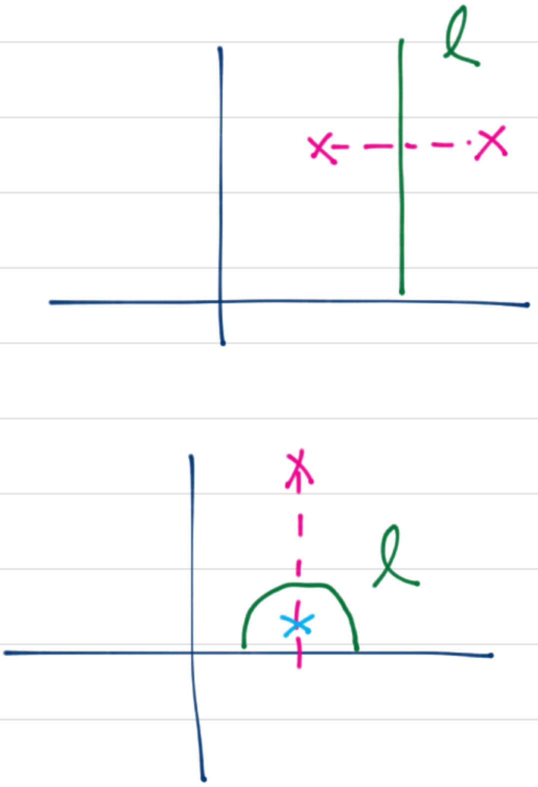
2 casos

→ ℓ - reta euclidiana de $\mathbb{C}$

$\Rightarrow R_\ell^{\mathbb{D}}, R_\ell^{\mathbb{H}}$ são a restrição a $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{H}$ da reflexão euclidiana em ℓ

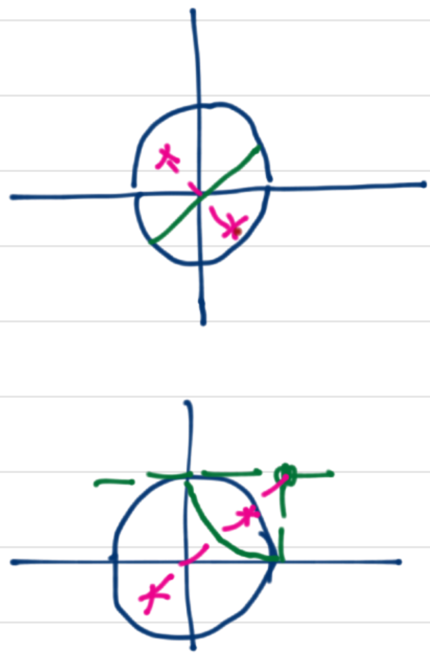
→ ℓ - circunferência de $\mathbb{C}$

$\Rightarrow R_\ell^{\mathbb{D}}, R_\ell^{\mathbb{H}}$ são a restrição da inversão em ℓ.



$\mathbb{H}$

$\mathbb{D}$



2) Rotações Hiperbólicas

Ex: $\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ //

$$\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}(z) = e^{i\alpha} z$$

$\alpha \in [0, 2\pi)$

Esta isometria coincide com a rotação euclidiana em torno de 0

$$f(z) = e^{\alpha i}\frac{z - \cancel{B}}{-\cancel{\bar{B}}z + 1}$$

$B = 0$

$|B| < 1$

Se $\alpha \neq 0$

$$\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha}(z) = e^{i\alpha} z$$

- tem um único pto fixo em $\mathbb{D}$ (a origem)
- Não tem pts fixos em $\partial\mathbb{D}$ (fixa 0 e ∞)
- Deixa invariantes as circunferências euclidianas em torno da origem (q são t.b. circ. hiperbólicas de centro hiperbólico 0)

$$k = d_{\mathbb{D}}(0, z) =$$

$$= 2\,\mathrm{arctgh}\, \delta_{\mathbb{D}}(0, z) =$$

$$= 2\,\mathrm{arctgh}\, |z|$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{|z| \text{ é cte}}$ $\Rightarrow$ circ. de centro 0

$\mathrm{tgh}\, k/2$

Em $\mathbb{H}$?

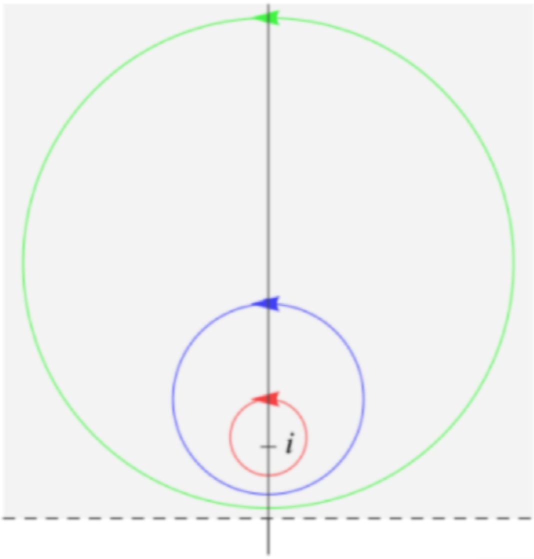
$$|z|$$

$$\delta_{\mathbb{D}}(z, w) = \left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|$$

$$\delta_{\mathbb{D}}(z, 0) = |z|$$

$\mathbb{H}$

$J^{-1}(0) = i$



?

Z

J

J^{-1}

· A isometria induzida em $\mathbb{H}$, tem um único pto fixo: i

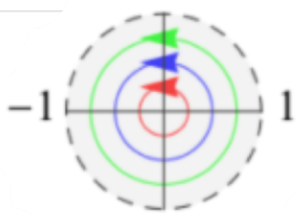
· Não tem pts fixos em $\overline{\mathbb{R}}_\infty$.

· Deixa invariantes

$J(z) = \frac{iz+1}{z+i}$

$J^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$

circ. hip. de centro (hiperbólico) i



$\mathbb{D}$

$$\ell^{\mathbb{H}}_{i,\alpha}(z) = J^{-1} \circ \ell^{\mathbb{D}}_{0,\alpha} \circ J(z)$$

$$= \cdots =$$

$$= \frac{z + \tan \alpha/2}{1 - \tan(\alpha/2) z}$$

NOTA:

Esta transf. de Möbius em $\overline{\mathbb{C}}$ fixa i e $-i$ (apenas i está em $\mathbb{H}$)

Em geral, se $G_{\mathbb{D}}$

$g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ leva $\underline{\underline{z_0}}$ em $\underline{\underline{0}}$

$$g^{-1} \circ \varphi^{\mathbb{D}}_{a,\alpha} \circ g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

é uma isometria com um único pto fixo em $\mathbb{D}$: o pto z_0 //

e sem pts fixos em $\partial \mathbb{D}$

<u>NOTA</u> (Ver Ex. Ficha 12)

$$\left(g^{-1} \circ \varphi_{a\alpha}^{\mathbb{D}}\, g\right)(z) = z$$

$$\varphi_{0,\alpha}^{\mathbb{D}}\left(g(z)\right) = g(z)$$

$\Rightarrow$ $g(z)$ é pto fixo de $\varphi_{0,\alpha}^{\mathbb{D}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(z) = 0 \\ g(z) = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = g^{-1}(0) = z_0 \\ z = g^{-1}(\infty) \notin \mathbb{D} \end{cases}$$

nem a $\partial\mathbb{D}$

Definição: Uma rotação hiperb. de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) é uma isometria obtida de

$$\rho^{\mathbb{D}}_{0,\alpha} \quad (\text{ou } \rho^{\mathbb{H}}_{i,\alpha})$$

pela conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$)

$\Rightarrow$ Uma rotação hiperbólica $\neq id$

$\rightarrow$ tem um único pto fixo em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$)

$\rightarrow$ Não tem pts fixos em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$)

3) Translações Hiperbólicas:

Ex: $k \in \mathbb{R}^+$

$$T_k^{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

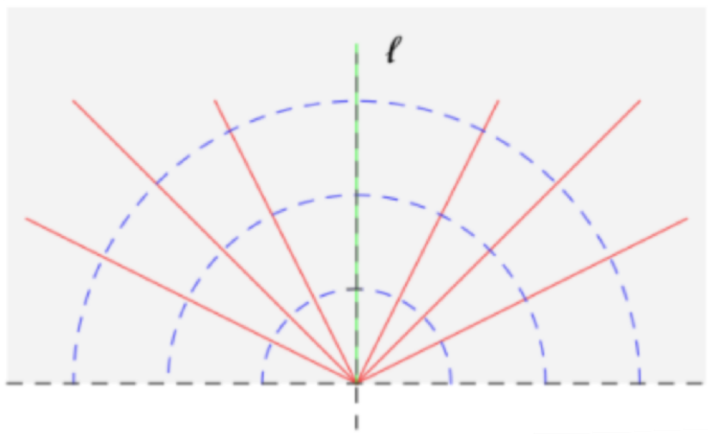
$$G_{\mathbb{H}} \ni T_k^{\mathbb{H}}(z) = kz \qquad \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$k > 0$

- Se $k \neq 1$ ($\neq id$) tem 2 pts fixos: $\infty, 0 \in \overline{\mathbb{R}}$

→ Não tem pts fixos em $\mathbb{H}$

→ Tem 2 pts fixos em $\overline{\mathbb{R}}$

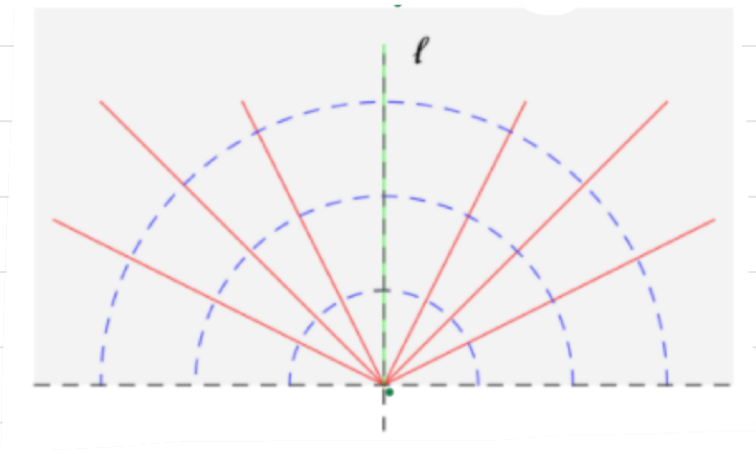


$\mathbb{H}$

$\longrightarrow$ Deixa invariantes rectas euclidianas da forma $y = mx$ ("passam" nos 2 pts fixos 0 e ∞)

Apenas uma destas rectas euclidianas é uma recta hiperbólica ℓ : $\operatorname{Re} z = 0$ (une os pts fixos 0 e ∞)

$\mathbb{H}$



0

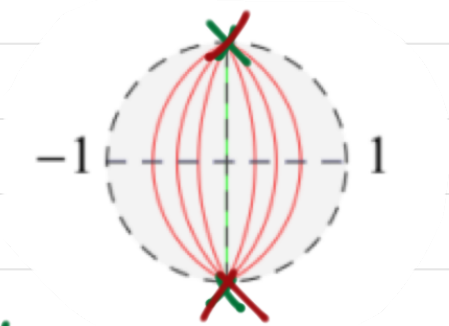
$0 \quad \infty$

J^{-1} $\quad$ J

$=$

$\overline{\mathbb{C}}$

Em $\mathbb{D}$?



$\mathbb{D}$

$=$

$$J(z) = \frac{iz+1}{z+i}$$

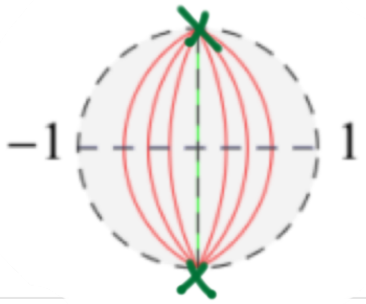
$$J^{-1}(z) = \frac{-iz+1}{z-i}$$

$\nexists \quad \forall$

$J(0) = -i$.

$J(\infty) = i$.

$\mathbb{D}$



kz

$$T_k^{\mathbb{D}}(z) := \left(J \circ T_k^{\mathbb{H}} \circ J^{-1}\right)(z)$$

$$= \cdots = \frac{(k+1)z + (k-1)i}{-(k-1)iz + k+1}$$

→ Não fixa nenhum pto em $\mathbb{D}$

→ Fixa 2 pts em $\partial\mathbb{D}$: i, $-i$

→ Deixa invariantes circunf. de $\mathbb{C}$ que passam em i e $-i$.

Apenas uma destas é uma reta hiperbólica: $\operatorname{Re} z = 0$ //

Conjugando $T_k^{\mathbb{H}}$ com um elemento de $G_{\mathbb{H}}$ que transforme uma recta hiperbólica r na recta hiperbólica l de eq. $\operatorname{Re} z = 0$

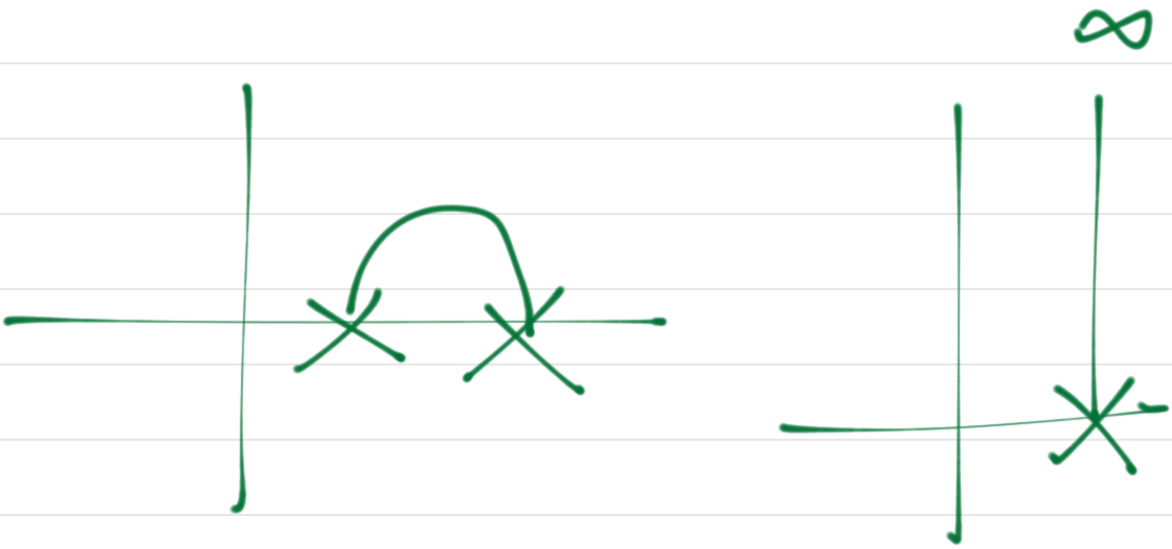
$$g^{-1} \circ T_k^{\mathbb{H}} \circ g$$

obtemos uma isometria que deixa r invariante (e mais nenhuma recta hiperbólica)

$$g^{-1} \circ T_k^{\mathbb{H}} \circ g$$

- não tem pts fixos em $\mathbb{H}$ //
- mas fixa 2 pts em $\overline{\mathbb{R}}$ //

(os pontos de $\overline{\mathbb{R}}$ n|m)



Definição: Uma translação hiperbólica de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) ao longo de uma reta hiperbólica $l_{//}$ é uma isometria obtida de $T_k^{\mathbb{D}}$ // (ou $T_k^{\mathbb{H}}$ //) por conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ // (ou $G_{\mathbb{H}}$) para algum $k \in \mathbb{R}^+$

4) Rotação $\boxed{\text{limite}}$

Ex: $\alpha \in \mathbb{R}$

$G \curvearrowright \mathbb{H}$

$$\rho^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha} : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$$

$$\rho^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha}(z) = \underbrace{z+\alpha}_{z}$$

$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha \in \mathbb{R}$

· Se $\alpha \neq 0$

$\longrightarrow$ Não tem pts fixos em $\mathbb{H}$

$\longrightarrow$ Fixa um único pto em $\overline{\mathbb{R}}$

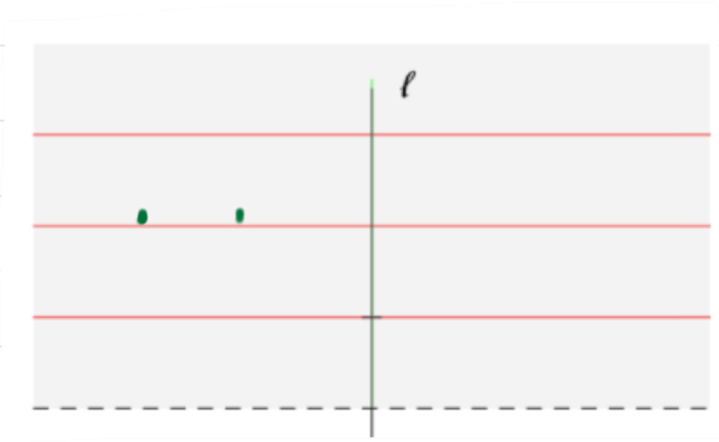
∞

(não tem outros pts fixos em $\overline{\mathbb{C}}$)

$\mathbb{H}$

$z+\alpha$

$\alpha \in \mathbb{R}$



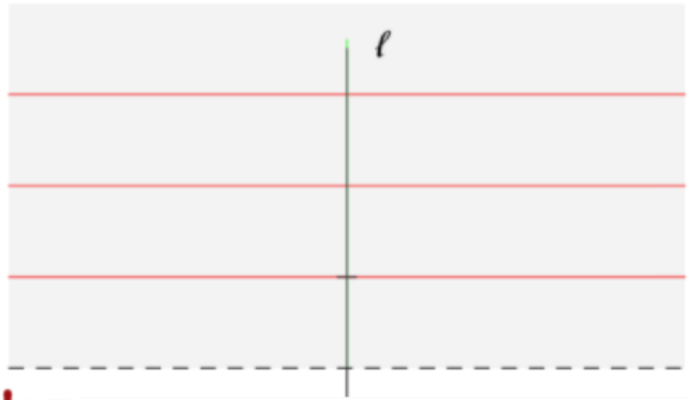
m

→ Deixa invariantes rectas euclidianas horizontais $y=k$ com $k \in \mathbb{R}^+$ mas nenhuma recta hiperbólica.

Se considerarmos estas rectas $\cup\{\infty\}$ obtemos circunferências de $\overline{\mathbb{C}}$ $\longrightarrow$ HOROCICLOS

$\mathbb{H}$ ∞

∞ →



Horociclos // ⊥ a ℓ

• Sem pts fixos em $\mathbb{D}$ ✓

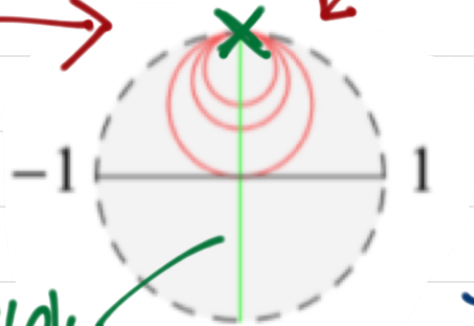
J^{-1} J

• Um único pto fixo em $\partial\mathbb{D}$ (i) ✓

Horociclos

$\mathbb{D}$

• deixa invariantes circ. de $\mathbb{C}$ que passam em i, e não tangentes a $\partial\mathbb{D}$ em i.



$J(\ell)$

$J(\infty) = i$

perp. à recta hip. $\mathrm{Re}\, z = 0$ $J(\ell)$

$$\rho^{\mathbb{D}}_{i,\alpha}(z) := \left(J \circ \rho^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha} \circ J^{-1}\right)(z)$$

$$= \frac{(2+\alpha i)z + \alpha}{\alpha z + (2 - \alpha i)}$$

Conjugando com um elemento de $G_{\mathbb{H}}$ que leva o pto $z_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ em ∞ obtemos uma isometria

→ sem pts fixos em $\mathbb{H}$.

→ um único pto fixo em $\overline{\mathbb{R}}$: z_0

→ Em $\overline{\mathbb{C}}$) têm um único pto fixo: z_0

$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

→ Deixa invariante circunf. de $\overline{\mathbb{C}}$ que passam em z_0 e não tgs a $\overline{\mathbb{R}}$ em z_0

— Horociclos

Definição: Uma **rotação limite** de $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$) em torno de um pto $z_0 \in \partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) é uma isometria obtida de $\ell^{\mathbb{D}}_{i,\alpha}$ (ou $\ell^{\mathbb{H}}_{\infty,\alpha}$) por conjugação com um elemento de $G_{\mathbb{D}}$ (ou $G_{\mathbb{H}}$) para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha \neq 0$

→ 2 pts fixos em $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{H}$)

→ um único pto fixo z_0 em $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$)

→ Em $\overline{\mathbb{C}}$ têm um único pto fixo

→ Deixa invariante circunf. de $\overline{\mathbb{C}}$ que passam em z_0 e não tgs a $\partial\mathbb{D}$ (ou $\overline{\mathbb{R}}$) em z_0

— Horociclos