Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

GEOMETRIA SIMPLÉCTICA

EXAME

6 DE JUNHO DE 2008

INSTRUÇÕES:
* Entregar até às 16h do dia 11 de Junho 2008 no meu gabinete.
* As respostas são individuais, podendo apenas consultar apontamentos pessoais ou livros.
* Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
* Excepto quando especificado, todas as variedades, aplicações, funções, fluxos, campos vectoriais, formas, etc. são consideradas diferenciáveis.

Isotopias e campos vectoriais simplécticos

1. Seja (M,ω) uma variedade simpléctica e $\{\psi_t\}_{t\in[0,1]}$ uma isotopia de simplectomofismos de M gerada por uma família de campos vectoriais simplécticos $X_t : M \to TM$, i.e. $\frac{d\psi_t}{dt} = X_t \circ \psi_t$ com $d(\iota(X_t)\omega) = 0$. Então o **fluxo** de $\{\psi_t\}$ é definido por

$$\mathsf{Flux}(\{\psi_t\}) := \int_0^1 [\iota(X_t)\omega]dt \ \in H^1(M,\mathbb{R}).$$

   (a) Seja $\gamma : S^1 \to M$ uma curva fechada arbitrária e considere a aplicação $\beta : [0,1]\times S^1 \to M$ definida por $\beta(t,s) = \psi_t(\gamma(s))$ (i.e. $\gamma_t(s) := \beta(t,s)$ é a imagem de γ por ψ_t). Mostre que

$$(\mathsf{Flux}(\{\psi_t\})([\gamma]) = \int\int_{[0,1]\times S^1} \beta^*\omega. \tag{1}$$

   Nota: Note que o lado direito desta fórmula é a área simpléctica descrita pela família de curvas fechadas γ_t, pelo que (1) implica que esta área apenas depende da classe de homologia $[\gamma]$.

   (b) Considere o simplectomorfismo de $(T^*S^1, \omega_{\mathsf{can}})$ dado por uma translacção ao longo das fibras

$$\psi(x,\xi^*) = (x, \xi^* + k)$$

   com $(x,\xi^*) \in T^*S^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ fixo. Mostre que não existe nenhuma família de campos vectoriais X_t em T^*S^1 que gere uma isotopia Hamiltoniana i.e. uma família ψ_t de simplectomorfismos de T^*S^1 tal que $\psi_0 = \mathsf{id}$, $\psi = \psi_1$ e $\iota(X_t)\omega = dH_t$ para uma família de funções $H_t : M \to \mathbb{R}$.

2. Seja (M,ω) uma veriedade simpléctica compacta e $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ uma família suave de subvariedades simplécticas compactas de M.
   (a) Assumindo o resultado clássico de que existe uma isotopia de difeomorfismos $\psi_t : M \to M$ tal que $\psi_t(\Sigma_0) = \Sigma_t$ e considerando as formas $\omega_t = \psi_t^*\omega$, mostre

que existe uma família de campos vectoriais X_t tal que

$$d(\iota(X_t)\omega_t) = -\frac{d\omega_t}{dt}.$$

(b) Considere o fibrado $(T\Sigma_0)^\omega \subset (TM)|_{\Sigma_0}$ cuja fibra em $p \in \Sigma_0$ é $(T_p\Sigma_0)^\omega$ (i.e. o espaço ortogonal simpléctico de $T_p\Sigma_0$. Mostre que um campo vectorial X é tangente a Σ_0 se e só se, para todo o $p \in \Sigma_0$, a restrição da forma-1 $\iota(X)\omega$ a $(T\Sigma_0)^\omega$ é zero.

(c) Assuma que, dada uma família de formas-1 $\alpha_t \in \Omega^1(M)$, existe uma família de funções diferenciáveis $f_t : M \to \mathbb{R}$, que depende suavemente de t, tal que, para todo o $p \in \Sigma_0$, a restrição de df_t a $(T\Sigma_0)^\omega$ é igual à restrição de α_t. Mostre que os campos vectoriais de (a) podem ser escolhidos tangentes a Σ_0.

(d) Mostre que existe uma isotopia ϕ_t de simplectomorfismos de M tal que $\phi_t(\Sigma_0) = \Sigma_t$.

Estruturas quase complexas

3. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, J uma estrutura quase complexa compatível e g a métrica Riemanniana correspondente (i.e. $g(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$). Sejam N e N' duas subvariedades compactas de dimensão 2 de M, fechadas, orientadas e tal que

$$\int_N \omega = \int_{N'} \omega.$$

Assumindo que $J(TN) \subset TN$ (i.e. que N é uma subvariedade quase complexa de M) e que a orientação de N coincide com a orientação induzida por J, mostre que

$$\mathrm{Vol}_g(N) \leq \mathrm{Vol}_g(N').$$

Sugestão: Compare as restrições de ω a Σ' e a Σ com o respectivos elementos de volume induzidos por g.

Nota: Note que este exercício prova que as subvariedades quase-complexas de dimensão 2 de M minimizam o volume na sua classe de homologia.

4. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, J uma estrutura quase complexa compatível e g a métrica Riemanniana associada a ω e a J. Dada uma função $H : M \to \mathbb{R}$, sejam X_H e grad$H$ o campo vectorial Hamiltoniano associado a H e o gradiente Riemanniano de H i.e.

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot) = g(\mathrm{grad}H, \cdot).$$

Mostre que

$$\mathrm{grad}(H) = JX_H \quad \text{e} \quad \iota(\mathrm{grad}H)\omega = i(\overline{\partial} - \partial)H.$$

5. Seja (M, J) uma variedade complexa e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função estritamente pluri-subharmónica, i.e. uma função para a qual a forma $\omega_f = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}f$ de tipo $(1,1)$ é simpléctica e compatível com J em M. Seja grad$f$ o gradiente de f definido em

relação à métrica Riemanniana em M dada por $g(\cdot,\cdot) = \omega_f(\cdot, J\cdot)$. Supondo que existe, mostre que o fluxo a 1-parâmetro ϕ_t, $t \in \mathbb{R}$, de grad$f$ satisfaz

$$\phi_t^* \omega_f = e^{4t} \omega_f.$$

Acções Hamiltonianas em variedades simplécticas

6. Seja $G = SO(3)$ e considere a identificação usual de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}^*$ com $\mathbb{R}^3$. Relembre que, com esta identificação, a acção coadjunta de G é a acção usual de $SO(3)$ em R^3 por rotações e que então as orbitas coadjuntas são as esferas $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$ de raio $r > 0$.
   (a) Mostre que, dado $\xi \in S_r^2$ e $v \in T_\xi S_r^2$, o vector

   $$X = \frac{\xi \times v}{||\xi||^2}$$

   é um elemento de $\mathfrak{g}$ cujo vector fundamental $X^\sharp$ em ξ é igual a v.
   Sugestão: Utilize a identidade em $\mathbb{R}^3$

   $$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B).$$

   (b) Mostre que neste caso a forma simpléctica canónica na orbita coadjunta de $\xi \in \mathfrak{g}^*$ é dada por

   $$\omega_\xi = d\theta \wedge dh.$$

   (c) Para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$ fixo considere as esferas $S_{\alpha_i}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de raio α_i com a forma simpléctica standard de volume $2\alpha_i$. Seja $P(\alpha)$ a variedade produto

   $$P(\alpha) = \prod_{i=1}^m S_{\alpha_i}^2 \subset (\mathbb{R}^3)^m$$

   com a forma simpléctica do produto. Podemos pensar num elemento de $P(\alpha)$ como um caminho poligonal em R^3 que começa na origem e tem m "passos" sucessivos de comprimento α_i. Considere a acção diagonal de $SO(3)$ em $P(\alpha)$. Mostre que esta acção é Hamiltoniana e determine a sua aplicação momento μ.

   (d) Diz-se que α é genérico se a equação

   $$\sum_{i=1}^m \epsilon_i \alpha_i = 0$$

   não tiver solução com $\epsilon_i = \pm 1$. Para um valor de α genérico descreva o espaço reduzido

   $$\mu^{-1}(0)/SO(3)$$

   quando $m = 3$ e $m = 4$.

7. (a) Considere um polítopo de Delzant $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ com um vértice em p. Sejam $u_1, \ldots, u_n$ os vectores primitivos geradores das arestas que se intersectam em p. Corte este canto de modo a obter um novo polítopo com os mesmos vértices de Δ à excepção de p, e com n novos vértices

$$p + \varepsilon u_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

em que ε é um número positivo próximo de zero. Mostre que este novo polítopo também é um polítopo de Delzant.

Nota: A variedade tórica correspondente diz-se o ε-blow-up da variedade tórica original.

(b) Considere o polítopo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Qual a variedade tórica W correspondente?

(c) Construa a variedade W por redução simpléctica de $\mathbb{C}^4$ em relação a uma acção de T^2.

(d) Mostre que W é um fibrado sobre $\mathbb{C}P^1$ de fibra $\mathbb{C}P^1$.