Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 2 – 8 de Janeiro de 2015

Duração: 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. (3 val.) Seja A um anel e M um módulo-A livre com base $\mathcal{B}$. Mostre que, para todo o módulo-A N, existe um isomorfismo de grupos (abelianos) $\hom_A(M,N) \to \hom_{\mathsf{Set}}(\mathcal{B},N)$.

2. Seja A um anel comutativo. Seja
$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0 \ . \qquad (*)$$
uma sucessão curta exacta de módulos-A e considere
$$0 \longrightarrow M_1 \otimes N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} M_2 \otimes N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}} M_3 \otimes N \longrightarrow 0 \ , \qquad (**)$$
onde N é um módulo-A.
   (a) (2,5 val.) Mostre que a sucessão $(**)$ é exacta em $M_2 \otimes N$.
   (b) (2,5 val.) Mostre que, se $(*)$ se cinde, então $(**)$ é exacta em $M_1 \otimes N$.

3. Seja D um domínio integral e M um módulo-D. Demonstre ou dê um contra-exemplo para cada uma das seguintes afirmações.
   (a) (2 val.) Se M é livre, então M é livre de torção.
   (b) (2 val.) Se M é livre de torção, então M é livre.

4. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C}) \ .$$
   (a) (2 val.) Determine os factores invariantes de A.
   (b) (3 val.) Determine a forma canónica de Jordan de A.

5. (3 val.) Seja $G = \langle a \rangle$ o grupo cíclico de ordem 3 e seja $\rho : G \to GL_3(\mathbb{C})$ o homomorfismo de grupos definido por
$$\rho(a) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$
Justifique que $(\mathbb{C}^3, \rho)$ é a representação regular de G.
Sugestão: Calcule o caracter da representação dada.