Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Fundamentos de Álgebra

LMAC e MMA

Teste 1 – 17 de Novembro de 2015

Duração: 1h 30m

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Sejam H e K grupos finitos, seja $G = H \times K$ e seja p um primo tal que $p \mid |G|$.
   (a) (1,5 val.) Sejam P_H e P_K subgrupos-p de Sylow de H e K, respectivamente. Mostre que $P_H \times P_K$ é um subgrupo-p de Sylow de G.
   (b) (2,5 val.) Seja P_G um subgrupo-p de Sylow de G. Mostre que existem subgrupos-p de Sylow P_H e P_K de H e K, respectivamente, tais que $P_G = P_H \times P_K$.

2. Seja $G = \langle a, b \mid |a| = 2q, |b| = 2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle \cong D_{2q}$ onde $q \in \mathbb{N}$ é um primo ímpar.
   (a) (2,5 val.) Considere os subgrupos $H = \langle a^q \rangle < G$ e $K = \langle a^2, b \rangle < G$. Mostre que $G = H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times D_q$.
   (b) (2,5 val.) Usando a alínea anterior e o exercício 1, determine os subgrupos-p de Sylow de G, com $p \in \{2, q\}$.

3. Seja D um domínio integral e $S \subset D$ um subconjunto multiplicativo tal que $0 \notin S$. Pode usar, sem justificar, que $S^{-1}D$ é um anel comutativo.
   (a) (2.5 val.)Mostre que $S^{-1}D$ é um domínio integral.
   (b) (2 val.)Seja $a \in D$. Mostre que $\frac{a}{1} \in S^{-1}D^{\times}$ se e só se $(a) \cap S \neq \varnothing$.
   (c) (1.5 val.)Mostre que qualquer ideial principal em $S^{-1}D$ é da forma $\left(\frac{a}{1}\right)$, para algum $a \in D$.
   (d) (2.5 val.)Seja $p \in D$ um elemento primo. Mostre que ou $\frac{p}{1} \in S^{-1}D^{\times}$ ou $\frac{p}{1}$ é primo em $S^{-1}D$.

4. (2,5 val.) Seja G um grupo e considere a categoria $\mathcal{C}_G$ com um único objecto $*$ e morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G$ com a composição dada pelo produto em G. Seja $\underline{\text{Set}}$ a categoria dos conjuntos. Mostre que dar um functor $F : \mathcal{C}_G \to \underline{\text{Set}}$ é equivalente a dar um conjunto X com uma acção de G.