DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2023/24
Cursos: LEQ, LEAmb, LEMat

TESTE 3 (VERSÃO B)

4 DE JANEIRO DE 2024, 18H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes. Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x,y,z) = \big(y, -x, x^2y^2z\big)$ e a superfície $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}, z > 0\big\}$ orientada pela normal unitária ν com terceira componente positiva.

   (a) (4 val.) Use o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$.

   Resolução:

   S é uma superfície cónica com vértice em $(0,0,3)$ e base no plano $z=0$. O bordo de S, ∂S, é o caminho obtido pela intersecção do cone $z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$ com o plano $z = 0$, ou seja:

   $$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{e} \qquad z = 0.$$

   Uma parametrização de ∂S com sentido compatível com a normal ν é

   $$\gamma(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t, 0), \qquad \text{onde } \ 0 \le t \le 2\pi.$$

   Pelo teorema de Stokes:

   $$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS &= \oint_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(3\operatorname{sen} t, -3\cos t, \cdots\big) \cdot \big(-3\operatorname{sen} t, 3\cos t, 0\big)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(-9\operatorname{sen}^t t - 9\cos^2 t\big) dt = -9\int_0^{2\pi} dt = -18\pi.\end{aligned}$$

   (b) (1 val.) Sendo S_2 a superfície parametrizada por

   $$g(t,r) = \big(r\cos t,\ r\operatorname{sen} t,\ r(3-r)\big), \quad \text{com} \quad 0 < t < 2\pi \ \text{ e } \ 0 < r < 3$$

   (e com a normal unitária obtida a partir de g) determine $\iint_{S_2} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS$.

   Sugestão: comece por determinar o bordo de S_2.

   Resolução:

Uma parametrização do bordo de S_2, ∂S_2, pode ser dada pela imagem por g da fronteira do domínio de g. Sendo que o domínio de g é $T = \{(t,r) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2\pi \wedge 0 < r < 3\}$, então

$$\gamma_2(t) = g(t,3) = (3\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t, 0), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Ou seja, γ_2 coincide com $\gamma = \partial S$. Usando o teorema de Stokes e a alínea (a):

$$\iint_{S_2} \mathrm{rot}\, F \cdot \nu \, dS \;=\; \oint_{\partial S_2} F \cdot d\gamma \;=\; \pm 18\pi.$$

Para saber qual dos dois possíveis resultados é o valor do nosso integral, devemos ainda verificar se o sentido de γ_2 é compatível com a orientação de g dada pelo vector normal

$$\frac{\partial g}{\partial t} \times \frac{\partial g}{\partial r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -r\,\mathrm{sen}\, t & r\cos t & 0 \\ \cos t & \mathrm{sen}\, t & 3-2r \end{vmatrix} = \big((3r-2r^2)\cos t, (3r-2r^2)\,\mathrm{sen}\, t, -r\big)$$

Sendo a terceira componente negativa, então a orientação de S_2 é a oposta à de S. Assim sendo, $\displaystyle\iint_{S_2} \mathrm{rot}\, F \cdot \nu \, dS \;=\; 18\pi.$

2. Considere os campos vectoriais definidos em $\mathbb{R}^3$ por

$$F(x,y,z) = \big(4z^2 + xy,\ 4x^2 + yz,\ 4y^2 + xz\big) \qquad G(x,y,z) = \big(xy,\ yz,\ xz\big).$$

(a) (1 val.) Qual dos campos vectoriais seguintes tem potencial vectorial definido em $\mathbb{R}^3$?

A. F B. $F - G$ C. G D. $F + G$

Resolução:

Para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{div}\, F = y + z + x \qquad \text{e} \qquad \mathrm{div}\, G = y + z + x = \mathrm{div}\, F.$$

Assim sendo

$$\mathrm{div}(F - G) = \mathrm{div}\, F - \mathrm{div}\, G = 0,$$

pelo que $F - G$ tem potencial vectorial em $\mathbb{R}^3$.

(b) (2 val.) Verifique que $H(x,y,z) = \big(zx^2 - y^3, xy^2 - z^3, yz^2 - x^3\big)$ é um potencial vectorial para o campo vectorial que determinou em (a).

Resolução:

Para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{rot}\, H = \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ zx^2 - y^3 & xy^2 - z^3 & yz^2 - x^3 \end{vmatrix}$$

$$= \big(z^2 + 3z^2, 3x^2 + x^2, y^2 + 3y^2\big) = \big(4z^2, 4x^2, 4y^2\big) = F - G.$$

3. Considere a função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad -\pi \le x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

(a) (4 val.) Calcule a série de Fourier de f.

Resolução:

Sendo $L = \pi$, então a série de Fourier de f tem a forma:

$$\mathrm{SF}\, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \Big).$$

Tendo em conta que f é nula no intervalo $[0, \pi]$, então os coeficientes são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{\pi}\pi = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\right)\Big|_{x=-\pi}^{0} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\Big|_{x=-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\big(1 - \cos n\pi\big) = \frac{1}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big).$$

Resulta então que

$$\mathrm{SF}\, f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big)\operatorname{sen}(nx).$$

(b) (1 val.) Indique a soma da série para x em $[-\pi, \pi]$.

Resolução:

Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$\mathrm{SF}\, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 0 & \text{se} \quad x \in]0, \pi[\\ \frac{1}{2} & \text{se} \quad x = -\pi \vee x = 0 \vee x = \pi. \end{cases}$$

4. Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{u}{16} & \text{se} \quad x \in]0, 2\pi[\ , \quad t > 0 \\ u(t, 0) = -d\ , \quad u(t, 2\pi) = d & \text{se} \quad t > 0 \end{cases} \tag{1}$$

sendo c uma constante real.

(a) (5 val.) Para $d = 0$, use o método de separação de variáveis para determinar a solução do problema (1) que verifica a condição inicial

$$u(0,x) = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\operatorname{sen}(5x) \qquad \text{para } x \in [0, 2\pi].$$

Resolução:

A equação diferencial parcial bem como as condições de fronteira para $d = 0$ são homogéneas. É válido, por isso, o princípio da sobreposição; ou seja, funções obtidas por combinações lineares arbitrárias de soluções da equação e das condições de fronteira ainda as satisfazem.

Vamos por isso usar o método de separação de variáveis, construindo soluções gerais por combinação linear (eventualmente infinita) de soluções mais simples, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, para $0 \le x \le 2\pi$ e $t \ge 0$. Substituindo na equação diferencial parcial obtemos

$$T'(t)X(x) = T(t)X''(x) + \frac{1}{16}T(t)X(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} - \frac{1}{16} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade só é possivel se as funções dos dois lados da igualdade, que dependem de variáveis diferentes x e t, forem ambas iguais a uma constante, digamos λ. Portanto é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0. \\ T'(t) = \left(\lambda + \dfrac{1}{16}\right)T(t). \end{cases}$$

As condições de fronteira homogéneas $u(t,0) = u(t,2\pi) = 0$ para as soluções da forma $T(t)X(x)$ não nulas dizem que

$$T(t)X(0) = T(t)X(2\pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0) = 0 \ \wedge \ X(2\pi) = 0$$

As soluções não nulas do problema de valores próprios de Dirichlet,

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 & x \in]0, 2\pi[\\ X(0) = X(2\pi) = 0 \end{cases}$$

são, a menos de combinação linear:

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2} \qquad \text{para} \qquad \lambda_n = -\omega^2 = -\frac{n^2}{4} \quad (\text{com } n = 1, 2, \cdots).$$

A segunda equação é uma equação linear homogénea para $T(t)$, cuja solução geral é

$$T(t) = Ce^{\left(\lambda + \frac{1}{16}\right)t} \quad \text{com} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, temos então (a menos de combinação linear):

$$T_n(t) = e^{\left(-\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16}\right)t}.$$

As soluções não triviais da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são portanto as funções da forma

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{\left(-\frac{n^2}{4} + \frac{1}{16}\right)t}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}$$

para cada $n = 1, 2, \ldots$

Procuramos agora uma solução formal para a equação e condição inicial que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left(-\frac{n^2}{4}+\frac{1}{16}\right)t} \operatorname{sen}\frac{nx}{2}.$$

Substituindo esta expressão na condição inicial $u(0,x) = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\operatorname{sen}(5x)$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{nx}{2} = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\operatorname{sen}(5x) = \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4\operatorname{sen}\frac{10x}{2}$$

pelo que os coeficientes A_n são:

$$A_3 = 1, \qquad A_{10} = -4, \qquad A_n = 0 \quad \text{se} \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{3, 10\}.$$

Desta forma, a solução é

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^{\left(-\frac{9}{4}+\frac{1}{16}\right)t} \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4e^{\left(-25+\frac{1}{16}\right)t} \operatorname{sen}(5x) \\ &= e^{-\frac{35}{16}t} \operatorname{sen}\frac{3x}{2} - 4e^{-\frac{399}{16}t} \operatorname{sen}(5x) \end{aligned}$$

(b) (2 val.) No caso em que $d = 1$, determine uma solução estacionária do problema (1).

Resolução:

Uma solução estacionária do problema (1) é uma função da forma $u(t,x) = v(x)$. Assim $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(x)$. Como $d = 1$, v é solução do problema de valores de fronteira:

$$\begin{cases} v'' + \dfrac{1}{16} v = 0 & \text{se} \;\; x \in \,]0, 2\pi[\\ v(0) = -1, \;\; v(2\pi) = 1 & \end{cases}$$

O polinómio característico da equação diferencial é $P(r) = r^2 + \frac{1}{16}$, pelo que

$$v(x) = A\cos\frac{x}{4} + B\operatorname{sen}\frac{x}{4}$$

Como $v(0) = -1$, $A = -1$. Por outro lado $v(2\pi) = 1$, pelo que $-\cos\frac{\pi}{2} + B\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, ou seja, $B = 1$. Assim, uma solução estacionária do problema (1) para $d = 1$ é

$$v(x) = -\cos\frac{x}{4} + \operatorname{sen}\frac{x}{4}.$$