DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEMat, LEQ

TESTE 3 (VERSÃO B)

8 DE JANEIRO DE 45^2, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \big(y, 0, 0\big)$.
   (a) (3 val.) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de
   $$S \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2 \;,\; y \leq 1\Big\}$$
   orientada pela normal unitária com segunda componente positiva.
   (b) (3 val.) Mostre que F tem um potencial vectorial e determine um potencial vectorial para F com terceira componente nula.

Resolução

(a) A superfície S é a secção de um parabolóide com eixo dos yy como eixo de simetria — como tal, trata-se de uma superfície elementar. O bordo de S é a curva de interseção de $y = x^2 + z^2$ com o plano $y = 1$. Dado que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, o teorema de Stokes garante-nos que o fluxo pedido é dado por
$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$
Uma parametrização de $S \cup \partial S$ é $g : T \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,z) = (x, x^2+z^2, z)$, com $T = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\}$. Note que a normal induzida por g, que é $\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial z} = (1, 2x, 0) \times (0, 2z, 1) = (2x, -1, 2z)$, tem segunda componente negativa. Tomando o caminho $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ (que parametriza a fronteira do domínio T no sentido positivo) então o bordo de S com sentido **contrário** ao compatível com a normal unitária prescrita é
$$\widetilde{\gamma}(\theta) = g\big(\varphi(\theta)\big) = (\cos\theta, \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta, \operatorname{sen}\theta) = (\cos\theta, 1, \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{para} \;\; \theta \in [0, 2\pi].$$
Tomamos então $\gamma(\theta) = \tilde{\gamma}(-\theta) = (\cos\theta, 1, -\operatorname{sen}\theta)$ com $\theta \in [0, 2\pi]$. Alternativamente, pode fazer uma figura representado S, ∂S e ν, e parametrizar $\gamma(\theta)$ com o sentido apropriado usando a regra da mão direita. Resulta então que:
$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F\big(\gamma(\theta)\big) \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (1,0,0) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, 0, -\cos\theta) \; d\theta = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta \, d\theta = 0$$

(b) Dado que o campo vectorial F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\operatorname{div} F = 0$ tem-se que F é um campo rotacional em $\mathbb{R}^3$. Seja $G = (A_1, A_2, 0)$, como pedido, tal que

$$\operatorname{rot} G = \left(-\tfrac{\partial A_2}{\partial z},\ \tfrac{\partial A_1}{\partial z},\ \tfrac{\partial A_2}{\partial x} - \tfrac{\partial A_1}{\partial y}\right) = F = (y, 0, 0).$$

Então

$$-\frac{\partial A_2}{\partial z} = y \qquad \Rightarrow \qquad A_2(x,y,z) = -yz + c_2(x,y)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_1(x,y,z) = c_1(x,y)$$

e $\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0$. Procurando uma solução desta equação tal que $c_2(x,y) = 0$ obtém-se $-\frac{\partial c_1}{\partial y} = 0$, pelo que $c_1(x,y)$ é uma função arbitrária de x. Podemos assim tomar $c_1(x,y) = 0$.

Conclui-se que um potencial vectorial para F da forma pedida é

$$G(x,y,z) = (0, -yz, 0)\,.$$

Pode ainda verificar (facilmente!) que $\operatorname{rot}(0, -yz, 0) = (0, 0, x) = F$.

2. Considere o PVI

$$y'' - 2y' = H(t-2)\,, \qquad\qquad y(0) = y'(0) = 0$$

(a) (2 val.) Determine a transformada de Laplace da solução do PVI.

(b) (2 val.) Calcule a solução do PVI.

(c) (2 val.) Sendo f uma função definida em $\mathbb{R}_0^+$ que verifica $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para alguns $M \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\mathcal{L}\big\{t\,f(t)\big\}(s) \;=\; -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s)\,, \quad \forall s > \alpha.$$

Resolução:

(a) Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se:

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 Y(s) - 2\big(-y(0) + sY(s)\big) = \frac{e^{-2s}}{s}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\big\{y(t)\big\}(s)$. Usando as condições iniciais, obtém-se:

$$(s^2 - 2s)Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-2)}.$$

(b) Fazendo a decomposição em fracções simples da função racional

$$\frac{1}{s^2(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-2}$$

obtém-se a equação (válida para qualquer $s \in \mathbb{R}$)

$$As(s-2) + B(s-2) + Cs^2 = 1$$

$$(A+C)s^2 + (-2A+B)s - 2B = 1,$$

cujas soluções são

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{e^{-2s}}{4}\left(-\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s-2}\right) \\
&= e^{-2s}\,\mathcal{L}\left\{\frac{1}{4}\big(-1 - 2t + e^{2t}\big)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{H(t-2)}{4}\big(-1 - 2(t-2) + e^{2(t-2)}\big)\right\}(s),
\end{aligned}$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{4}H(t-2)\big(3 - 2t + e^{2t-4}\big).$$

(c) Utilizando a regra de Leibniz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\Big(e^{-st}f(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s).
\end{aligned}$$

Para que se possa aplicar a regra de Leibniz nesta situação, é necessário que $\frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-st}f(t)\Big) = e^{-st}(-t)f(t)$ seja contínua e que o integral

$$\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}(-t)f(t)\,dt$$

seja convergente (ou seja, que o limite acima exista em $\mathbb{R}$). Ora, se $s > \alpha$,

$$|te^{-st}f(t)| \leq tMe^{-(s-\alpha)t}$$

pelo que

$$\left|\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt\right| \leq M\int_0^\infty te^{-(s-\alpha)t}dt < \infty \qquad \text{(desde que seja } s > \alpha\text{)}.$$

3. Sendo $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{x}{2}$, considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = (2+3t^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \text{se } x \in]0,\pi[\text{ e } t > 0, \\
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}u(\pi,t) = 0 & \text{se } t > 0, \\
u(x,0) = f(x) & \text{se } x \in]0,\pi[\,.
\end{cases}$$

(a) (4 val.) Determine a série de cossenos de f, indicando a sua soma no intervalo $[-\pi,\pi]$.

(b) (4 val.) Resolva o problema de valores iniciais e de fronteira.

Resolução:

(a) A série de cossenos de $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tem a forma

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = -\frac{1}{\pi}\, \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-x) \cos(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\cancel{(-x)\frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)\Big|_0^{\pi}} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx)\, dx \right) \\
&= -\frac{1}{\pi n^2} \cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\big(-\cos(n\pi) + 1 \big) \\
&= \frac{1}{\pi n^2}\big(1 - (-1)^n \big)
\end{aligned}$$

Logo, a série de cossenos de f é

$$S_{\cos} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} \Big(1 - (-1)^n \Big) \cos(nx)$$

Para determinar a soma da série, consideramos a extensão par de f, que é a função $\widehat{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widehat{f}(x) \;=\; \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{se } -1 \le x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{se } \quad 0 \le x < 1 \end{cases} \;=\; -\frac{|x|}{2}$$

Esta função é contínua no seu domínio e $\widehat{f}(-\pi) = \widehat{f}(\pi)$. Além disso, $\widehat{f}$ é seccionalmente C^1. Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$S_{\cos} f(x) = -\frac{|x|}{2} \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(b) Começamos por resolver o problema de valores de fronteira

$$u_t = (2 + 3t^2) u_{xx} \quad \text{e} \quad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) \qquad \text{com } x \in [0, \pi],\ t > 0,$$

(um problema de Neumann homogéneo) pelo método de separação de variáveis; para tal, vamos procurar soluções não nulas da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$T'(t)X(x) = \big(2 + 3t^2\big) T(t) X''(x) \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{T'}{\big(2 + 3t^2\big) T} = \frac{X''}{X},$$

válida para qualquer $x \in \,]0, \pi[$ e $t > 0$. Como o primeiro membro da igualdade depende apenas de t, enquanto o segundo membro depende apenas de x, para que a última igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0, \pi[$, ambos os membros da mesma têm que ser constantes. Assim sendo, para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{T'}{\big(1+2t\big)T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u_x(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X'(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não deve ser a função nula.

$$u(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; X'(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u_x(t,\pi) = 0 \;\Rightarrow\; X'(\pi) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } \ x \in]0,\pi[\\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

e

$$T' = \lambda\big(1+2t\big)T \qquad \text{se } \ t > 0. \tag{2}$$

O problema (1) é um problema de valores próprios para a equação $X'' - \lambda X = 0$ com condições de fronteira de Neumann $X'(0) = X'(\pi) = 0$. Assim, os valores próprios são 0 e $-n^2$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), associados às soluções $X_0(x) = 1$ e $X_n(x) = \cos(nx)$.

Podemos agora resolver (2), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente, pois para outros valores de λ a solução de (1) é a solução nula, que não nos interessa. Assim, para $\lambda = 0$, e a menos de combinação linear

$$T' = 0 \;\Rightarrow\; T_0(t) = 1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, também a menos de combinação linear

$$T'(t) = -n^2\big(2+3t^2\big)T \;\Rightarrow\; T_n(t) = e^{-n^2(2t+t^3)}$$

Então

$$u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = 1$$

é solução do problema de valores na fronteira, assim como para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-n^2(2t+t^3)}\cos(nx)$$

Consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$u(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2(2t+t^3)}\cos(nx)$$

Para calcular as constantes A_n com $n = 0, 1, 2, \ldots$ utilizamos a condição inicial e os resultados da alínea (a):

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx) = u(0,x) = f(x) = S_{\cos}f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2}\Big(1-(-1)^n\Big)\cos(nx)$$

Assim

$$A_0 = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad A_n = \frac{1}{\pi n^2}\Big(1-(-1)^n\Big) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, a solução do problema de valores iniciais e de fronteira é

$$u(t,x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2}\Big(1-(-1)^n\Big)e^{-n^2(2t+t^3)}\cos(nx).$$