

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEMat, LEQ

TESTE 3 (VERSÃO B)

8 DE JANEIRO DE 45², 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = (y, 0, 0)$.

(a) (3 val.) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $\text{rot } F$ através de

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2 + z^2, y \leq 1\}$$

orientada pela normal unitária com segunda componente positiva.

(b) (3 val.) Mostre que F tem um potencial vectorial e determine um potencial vectorial para F com terceira componente nula.

2. Considere o PVI

$$y'' - 2y' = H(t - 2), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(a) (2 val.) Determine a transformada de Laplace da solução do PVI.

(b) (2 val.) Calcule a solução do PVI.

(c) (2 val.) Sendo f uma função definida em \mathbb{R}_0^+ que verifica $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ para alguns $M \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\mathcal{L}\{t f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad \forall s > \alpha.$$

3. Sendo $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{x}{2}$, considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = (2 + 3t^2) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \text{se } x \in]0, \pi[\text{ e } t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x} u(\pi, t) = 0 & \text{se } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

(a) (4 val.) Determine a série de cossenos de f , indicando a sua soma no intervalo $[-\pi, \pi]$.

(b) (4 val.) Resolva o problema de valores iniciais e de fronteira.