DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEMat, LEQ

Teste 3 (Versão A)

8 de Janeiro de 45^2, 19h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x, y, z) = \big(0, 0, x\big)$.
   (a) (3 val.) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de
   $$S \;=\; \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2 \;,\; x \le 1\Big\}$$
   orientada pela normal unitária com primeira componente positiva.
   (b) (3 val.) Mostre que F tem um potencial vectorial e determine um potencial vectorial para F com primeira componente nula.

Resolução

(a) A superfície S é a secção de um parabolóide com eixo dos xx como eixo de simetria — como tal, trata-se de uma superfície elementar. O bordo de S é a curva de interseção de $x = y^2 + z^2$ com o plano $x = 1$. Dado que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$, o teorema de Stokes garante-nos que o fluxo pedido é dado por
$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$
Uma parametrização de $S \cup \partial S$ é $g : T \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(y, z) = (y^2 + z^2, y, z)$, com $T = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \le 1\}$. Note que a normal induzida por g, que é $\frac{\partial g}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial z} = (2y, 1, 0) \times (2z, 0, 1) = (1, -2y, -2z)$, tem primeira componente positiva. Tomando o caminho $\varphi(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, com $\theta \in [0, 2\pi]$ (que parametriza a fronteira do domínio T no sentido positivo) então o bordo de S com sentido compatível com a normal unitária prescrita é
$$\gamma(\theta) = g\big(\varphi(\theta)\big) = (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (1, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{para} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$
Alternativamente, pode fazer uma figura representado S, ∂S e ν, e parametrizar $\gamma(\theta)$ com o sentido apropriado usando a regra da mão direita. Resulta então que:
$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, dS = \int_\gamma F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F\big(\gamma(\theta)\big) \cdot \gamma'(\theta) \, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (0, 0, 1) \cdot (0, -\operatorname{sen}\theta, \cos\theta) \; d\theta = -\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = 0$$

(b) Dado que o campo vectorial F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $\operatorname{div} F = 0$ tem-se que F é um campo rotacional em $\mathbb{R}^3$. Seja $G = (0, A_2, A_3)$, como pedido, tal que

$$\operatorname{rot} G = \left(\tfrac{\partial A_3}{\partial y} - \tfrac{\partial A_2}{\partial z}, -\tfrac{\partial A_3}{\partial x}, \tfrac{\partial A_2}{\partial x} \right) = F = (0, 0, x).$$

Então $\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0$ e

$$-\frac{\partial A_3}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_3(x, y, z) = c_3(y, z)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = x \qquad \Rightarrow \qquad A_2(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + c_2(y, z)$$

Procurando uma solução da primeira equação tal que $c_2(y, z) = 0$, obtém-se $\frac{\partial c_3}{\partial y} = 0$ pelo que $c_3(y, z)$ é uma função arbitrária de z. Podemos assim tomar $c_3(y, z) = 0$.

Conclui-se que um potencial vectorial para F da forma pedida é

$$G(x, y, z) = \left(0, \tfrac{x^2}{2}, 0\right).$$

Pode ainda verificar (facilmente!) que $\operatorname{rot}\left(0, \frac{x^2}{2}, 0\right) = (0, 0, x) = F$.

2. Considere o PVI

$$y'' + 2y' = H(t-1)\,, \qquad\qquad y(0) = y'(0) = 0$$

(a) (2 val.) Determine a transformada de Laplace da solução do PVI.

(b) (2 val.) Calcule a solução do PVI.

(c) (2 val.) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}_0^+$ que verifica $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ para alguns $M \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\mathcal{L}\big\{t\, f(t)\big\}(s) \;=\; -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s)\,, \quad \forall s > \alpha.$$

Resolução:

(a) Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial, obtém-se:

$$-y'(0) - sy(0) + s^2 Y(s) + 2\big(-y(0) + sY(s)\big) = \frac{e^{-s}}{s}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\big\{y(t)\big\}(s)$. Usando as condições iniciais, obtém-se:

$$(s^2 + 2s)Y(s) = \frac{e^{-s}}{s} \qquad \Leftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{e^{-s}}{s^2(s+2)}.$$

(b) Fazendo a decomposição em fracções simples da função racional

$$\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2}$$

obtém-se a equação (válida para qualquer $s \in \mathbb{R}$)

$$As(s+2) + B(s+2) + Cs^2 = 1$$

$$(A + C)s^2 + (2A + B)s + 2B = 1,$$

cujas soluções são

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{4}.$$

Desta forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big\{y(t)\big\}(s) &= \frac{e^{-s}}{4}\left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}\right) \\
&= e^{-s}\,\mathcal{L}\left\{\frac{1}{4}\big(-1 + 2t + e^{-2t}\big)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{H(t-1)}{4}\big(-1 + 2(t-1) + e^{-2(t-1)}\big)\right\}(s),
\end{aligned}$$

pelo que a solução do PVI é

$$y(t) = \frac{1}{4}H(t-1)\big(2t - 3 + e^{2-2t}\big).$$

(c) Utilizando a regra de Leibniz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds}\Big(e^{-st}f(t)\Big)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt = -\mathcal{L}\big\{tf(t)\big\}(s).
\end{aligned}$$

Para que se possa aplicar a regra de Leibniz nesta situação, é necessário que $\frac{\partial}{\partial s}\Big(e^{-st}f(t)\Big) = e^{-st}(-t)f(t)$ seja contínua e que o integral

$$\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}(-t)f(t)\,dt$$

seja convergente (ou seja, que o limite acima exista em $\mathbb{R}$). Ora, se $s > \alpha$,

$$|te^{-st}f(t)| \le tMe^{-(s-\alpha)t}$$

pelo que

$$\left|\int_0^\infty e^{-st}(-t)f(t)\,dt\right| \le M\int_0^\infty te^{-(s-\alpha)t}dt < \infty \qquad \text{(desde que seja } s > \alpha\text{)}.$$

3. Sendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = (1+2t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \text{se } x \in \,]0,1[\, \text{ e } t > 0, \\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}u(1,t) = 0 & \text{se } t > 0, \\[2mm]
u(x,0) = f(x) & \text{se } x \in \,]0,1[\,.
\end{cases}$$

(a) (4 val.) Determine a série de cossenos de f, indicando a sua soma no intervalo $[-1,1]$.

(b) (4 val.) Resolva o problema de valores iniciais e de fronteira.

Resolução:

(a) A série de cossenos de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tem a forma

$$S_{\cos} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x),$$

onde

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left(\cancel{x\frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\Big|_0^1} - \int_0^1 \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx\right) \\ &= 2\,\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n^2\pi^2}\big(\cos(n\pi) - 1\big) \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\big((-1)^n - 1\big) \end{aligned}$$

Logo, a série de cossenos de f é

$$S_{\cos} f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n - 1\Big)\cos(n\pi x)$$

Para determinar a soma da série, consideramos a extensão par de f, que é a função $\widehat{f} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \le x < 0 \\ x & \text{se } \quad 0 \le x < 1 \end{cases} = |x|$$

Esta função é contínua no seu domínio e $\widehat{f}(-1) = \widehat{f}(1)$. Além disso, $\widehat{f}$ é seccionalmente C^1. Pelo teorema da convergência pontual das séries de Fourier:

$$S_{\cos} f(x) = |x| \qquad \forall x \in [-1,1].$$

(b) Começamos por resolver o problema de valores de fronteira

$$u_t = (1+2t)u_{xx} \quad \text{e} \quad u_x(0,t) = u_x(1,t) \qquad \text{com } x \in [0,1],\ t > 0,$$

(um problema de Neumann homogéneo) pelo método de separação de variáveis; para tal, vamos procurar soluções não nulas da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação diferencial, obtemos

$$T'(t)X(x) = \big(1+2t\big)T(t)X''(x) \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{T'}{\big(1+2t\big)T} = \frac{X''}{X},$$

válida para qualquer $x \in\ ]0,1[$ e $t > 0$. Como o primeiro membro da igualdade depende apenas de t, enquanto o segundo membro depende apenas de x, para que a última igualdade se verifique para todo $t > 0$ e $x \in]0,1[$, ambos os membros da mesma têm que ser constantes. Assim sendo, para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\frac{T'}{\big(1+2t\big)T} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = \lambda.$$

Por outro lado, analisando as condições de fronteira

$$u_x(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t)X'(0) = 0 \;\Rightarrow\; T(t) \equiv 0 \text{ ou } X'(0) = 0$$

dado que $T(t)$ não deve ser a função nula.

$$u(t,0) = 0 \;\Rightarrow\; X'(0) = 0$$

Do mesmo modo

$$u_x(t,1) = 0 \;\Rightarrow\; X'(1) = 0$$

Temos assim dois problemas para resolver:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & \text{se } \; x \in]0,1[\\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

e

$$T' = \lambda\big(1+2t\big)T \qquad \text{se } \; t > 0. \tag{2}$$

O problema (1) é um problema de valores próprios para a equação $X'' - \lambda X = 0$ com condições de fronteira de Neumann $X'(0) = X'(1) = 0$. Assim, os valores próprios são 0 e $-n^2\pi^2$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$), associados às soluções $X_0(x) = 1$ e $X_n(x) = \cos(n\pi x)$.

Podemos agora resolver (2), apenas para os valores de λ encontrados anteriormente, pois para outros valores de λ a solução de (1) é a solução nula, que não nos interessa. Assim, para $\lambda = 0$, e a menos de combinação linear

$$T' = 0 \;\Rightarrow\; T_0(t) = 1.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, também a menos de combinação linear

$$T'(t) = -n^2\pi^2\big(1+2t\big)T \;\Rightarrow\; T_n(t) = e^{-n^2\pi^2(t+t^2)}$$

Então

$$u_0(t,x) = T_0(t)X_0(x) = 1$$

é solução do problema de valores na fronteira, assim como para cada $n \in \mathbb{N}$, a função

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = e^{-n^2\pi^2(t+t^2)}\cos(n\pi x)$$

Consequentemente qualquer combinação linear tambem o será, ou seja

$$u(t,x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2(t+t^2)}\cos(n\pi x)$$

Para calcular as constantes A_n com $n = 0,1,2,\ldots$ utilizamos a condição inicial e os resultados da alínea (a):

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi x) = u(0,x) = f(x) = S_{\cos}f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n - 1\Big)\cos(n\pi x)$$

Assim

$$A_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad A_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n - 1\Big) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, a solução do problema de valores iniciais e de fronteira é

$$u(t,x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n - 1\Big)e^{-n^2\pi^2(t+t^2)}\cos(n\pi x).$$