DM
DEPARTAMENTO
DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral III

1º Semestre 2024/25

Cursos: LEAmb, LEMat, LEQ

TESTE 3 (VERSÃO A)

8 DE JANEIRO DE 45^2, 19H

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
Duração: 45m.

1. Considere o campo vectorial $F(x,y,z) = \big(0,0,x\big)$.
   (a) (3 val.) Utilizando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de $\operatorname{rot} F$ através de
   $$S \;=\; \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2 \;,\; x \le 1\Big\}$$
   orientada pela normal unitária com primeira componente positiva.
   (b) (3 val.) Mostre que F tem um potencial vectorial e determine um potencial vectorial para F com primeira componente nula.

2. Considere o PVI
   $$y'' + 2y' = H(t-1)\,, \qquad\qquad y(0) = y'(0) = 0$$
   (a) (2 val.) Determine a transformada de Laplace da solução do PVI.
   (b) (2 val.) Calcule a solução do PVI.
   (c) (2 val.) Sendo f uma função definida em $\mathbb{R}_0^+$ que verifica $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$ para alguns $M \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que
   $$\mathcal{L}\big\{t\,f(t)\big\}(s) \;=\; -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\big\{f(t)\big\}(s)\,, \quad \forall s > \alpha.$$

3. Sendo $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$, considere o problema de valores iniciais e de fronteira
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} \;=\; (1+2t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & \text{se } \; x \in \,]0,1[\; \text{ e } t > 0, \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) \;=\; \dfrac{\partial u}{\partial x}u(1,t) \;=\; 0 & \text{se } \; t > 0, \\[2mm] u(x,0) \;=\; f(x) & \text{se } \; x \in \,]0,1[\,. \end{cases}$$
   (a) (4 val.) Determine a série de cossenos de f, indicando a sua soma no intervalo $[-1,1]$.
   (b) (4 val.) Resolva o problema de valores iniciais e de fronteira.